

# Exercices d'économie industrielle<sup>12</sup>

Pr. Pascal FAVARD

23 août 2016

1. Ces exercices sont écrits sous Latex et les graphiques sous Tikz. Ils font une large place aux graphiques et sont d'un niveau intermédiaire. Les corrections sont très détaillées mais elles n'ont aucun intérêt si vous n'avez pas tout d'abord passé du temps à faire ces exercices par vous même. Il est impossible de citer toutes mes sources d'inspiration mais sachez que rien n'est jamais vraiment original...

2. Merci de me signaler les erreurs ou les coquilles.

# Sommaire

	<b>Page</b>
<b>1 Jeux en information complète</b>	<b>1</b>
<b>2 Jeux en information incomplète</b>	<b>23</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>43</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>43</b>
<b>Liste des tables</b>	<b>43</b>
<b>Index</b>	<b>44</b>

# Chapitre 1

## Jeux en information complète

### Sommaire

---

Diamonds Are Forever . . . . .	2
Quantity or Price? . . . . .	2
Dupont & Dupond . . . . .	7
Cournot Vs Stackelberg . . . . .	8
Bonne ou mauvaise, c'est la qualité qui compte! . . . . .	11
Une plage linéaire... . . . .	14
Cartel . . . . .	18
Bertrand . . . . .	19
Syndicat . . . . .	20
Super-jeu . . . . .	21

---

**Exercice 1 : Diamonds Are Forever**

Supposons que pour acheter des diamants il n'y ait aucune autre possibilité que de se rendre chez un diamantaire et que dans cette économie il n'ait que deux diamantaires, identiques en tout point. James, le consommateur représentatif, ne subit aucun coût pour se rendre chez le diamantaire le plus proche de son domicile, en revanche, il doit payer  $T > 0$  pour se rendre chez celui qui en est le plus éloigné<sup>1</sup>. Soit  $D(p)$  la demande totale sur le marché des diamants lorsque le prix unitaire du bien homogène est  $p$ . Le coût unitaire d'un diamant est  $c > 0$ . Supposons que sur ce marché il existe un équilibre de Nash en prix,  $p^* \geq c$ , connu de tout le monde. Les consommateurs se partagent entre les deux diamantaires.

- 1 – Y a-t-il des consommateurs que subissent  $T$  à l'équilibre ?
- 2 – Un des deux diamantaires a-t-il intérêt à proposer unilatéralement un prix légèrement inférieur à  $p^*$  ?
- 3 – Un des deux diamantaires a-t-il intérêt à proposer unilatéralement un prix légèrement supérieur à  $p^*$  ?
- 4 – Déterminez à quoi est égal  $p^*$  et commentez.

**Solution :**

- 1) Non, puisque tous savent que le prix est le même chez les deux diamantaires.
- 2) Non, puisqu'aucun consommateur ne sera au courant.
- 3) Supposons qu'un des diamantaires propose  $p = p^* + \epsilon$  avec  $\epsilon \in (0, T]$ . Si James est chez ce diamantaire il se rend bien compte que le prix affiché est supérieur au prix d'équilibre qui est connaissance commune. Il n'a toutefois pas intérêt à changer de diamantaire étant donné que dans ce cas il subirait un coût de transport  $T$ . Cette déviation en prix est donc a priori profitable pour notre diamantaire.
- 4) Puisqu'une augmentation du prix peut être profitable, il suffit de déterminer quel niveau de prix maximise le profit d'un diamantaire. La réponse est évidente, c'est le prix de monopole,  $p^* = p^{Mo}$ . Lorsque  $T = 0$ , on a  $p^* = c$ . C'est ce que l'on appelle le paradoxe de Bertrand, un marché duopolistique où le prix est égal au coût marginal comme si le marché était concurrentiel. Ici  $T > 0$ , ce qui permet à chacun des duopoleurs de « monopoliser la moitié de la demande », c'est le paradoxe de Diamond. Introduire un coût de transport revient à placer les consommateurs en information imparfaite sur les prix pratiqués, ceux-ci devant se déplacer pour observer les prix.

**Exercice 2 : Quantity or Price ?**

Consider a monopolist facing an uncertain inverse demand

$$p = \max\{a - bQ + \theta, 0\}. \quad (1.1)$$

When setting its price or quantity the monopolist does not know  $\theta$  but knows that  $\mathbb{E}[\theta] = 0$  and  $\mathbb{E}[\theta^2] = \sigma^2$ . The quadratic cost function of this firm is given by :

$$C(Q) = c_1Q + \frac{c_2Q^2}{2}, \quad (1.2)$$

with  $a > c_1 > 0$ ,  $c_2 > -2b$  and obviously  $b > 0$ .

1. Il suffit de normaliser le coût pour se rendre chez le diamantaire le plus proche à zéro,  $T$  est alors un différentiel de coût.

- 1 – Determine the marginal cost function, noted  $Cm(Q)$ . Comment.
- 2 – Solve the monopolist's program if he sets the quantity.
- 3 – Write carefully  $\mathbb{E}(Q^2)$  and solve the monopolist's program if he sets the price.
- 4 – Show that the monopolist prefers to set a quantity if the marginal cost curve is increasing and a price if the marginal cost curve is decreasing. Provide a short intuition for the result using graphics.

Now consider a differentiated duopoly facing the uncertain inverse demand system :

$$\begin{cases} p_1 = \max\{a - bq_1 - dq_2 + \theta, 0\} & (1.3) \\ p_2 = \max\{a - bq_2 - dq_1 + \theta, 0\}, & (1.4) \end{cases}$$

with  $0 < d < b$ ,  $\mathbb{E}[\theta] = 0$  and  $\mathbb{E}[\theta^2] = \sigma^2$ . The cost function for firm  $i$ , for  $i = (1, 2)$ , is given by  $C(q_i) = c_1q_i + \frac{c_2q_i^2}{2}$ , with  $a > c_1 > 0$  and  $c_2 > -\frac{2(b^2 - d^2)}{b}$ .

- 5 – Calculate the uncertain demand system. Which is the cross-price elasticity sign? Comment.
- 6 – Qualify demands if  $d = 0$  and goods when  $b = d \neq 0$ .

Both firms play a one-shot game in which they choose the strategy variable and the value of this variable simultaneously. That is, each firm's strategy set is the union of all fixed quantities and all fixed prices. The purpose is in characterizing the Nash equilibria of this one-stage game in which strategic variables, i.e. the price or the quantity, are selected endogenously. The analysis is restricted to pure-strategy equilibria.

- 7 – Suppose the duopolist  $j$  setting the quantity. In this case duopolist  $i$  ( $j \neq i$ ) could choose :

- i) to compete in quantity. Calculate his best-response  $q_i(q_j)$  and his best-response payoff.
- ii) to compete in price. Calculate his best-response  $p_i(q_j)$  and his best-response payoff.

- 8 – Suppose the duopolist  $j$  setting the price. In this case duopolist  $i$  ( $j \neq i$ ) could choose<sup>1</sup> :

- i) to compete in quantity. Calculate his best-response  $q_i(p_j)$  and his best-response payoff.
- ii) to compete in price. Calculate his best-response  $p_i(p_j)$  and his best-response payoff.

- 9 – Argue by the same line of reasoning as in question (4–) that

- i) if  $c_2 > 0$  in the unique Nash equilibrium both firms choose quantities,
- ii) if  $c_2 < 0$  in the unique Nash equilibrium both firms choose prices,
- iii) if  $c_2 = 0$  there exist four Nash equilibria in pure strategies.

- 10 – Show there are four Nash equilibria in pure strategies in the case with certain demand whatever  $c_2$ .

### Solution :

- 1) Differentiating (2.2) with respect to the quantity,  $Cm(Q) = c_1 + c_2Q$ . This function is increasing if  $c_2 > 0$ .
- 2) If the monopolist chooses the quantity then his expected profit is equal to  $\mathbb{E}(\pi) = \mathbb{E}(p)Q - C(Q)$ . Using (2.1) and (2.2), and since  $\mathbb{E}(\theta) = 0$ , we have  $\mathbb{E}(\pi) = (a - bQ)Q - c_1Q - \frac{c_2Q^2}{2}$ . The monopolist's program is :

$$\mathcal{P}_{Mo} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{Q\} \end{array} (a - bQ)Q - c_1Q - \frac{c_2Q^2}{2} \right. \quad (1.5)$$

1. Rename  $\alpha := \frac{a(b-d)}{b}$ ,  $\beta := \frac{b^2-d^2}{b}$ ,  $\gamma := \frac{d}{b}$ ,  $\Theta := \frac{\theta(b-d)}{b}$ .

The FOC of the program (2.5) gives us  $Q^{M01} = \frac{a-c_1}{2b+c_2}$  the quantity produced by the monopolist. As  $a > c_2$  and  $c_2 > -2b$ , the quantity  $Q^{M01}$  is positive and the SOC is satisfied. Thus market price is  $p^{M01} = \max\left\{\frac{ab+ac_2+bc_1}{2b+c_2} + \theta, 0\right\}$  and so  $\mathbb{E}(\pi^{M01}) = \frac{(a-c_1)^2}{2(2b+c_2)}$ .

- 3) If the monopolist chooses the price then his expected profit is equal to  $\mathbb{E}(\pi) = p\mathbb{E}(Q) - \mathbb{E}(C(Q))$ . Using (2.2) and (2.1) we get :  $\mathbb{E}(Q^2) = \frac{\mathbb{E}((a-p)^2 + \theta^2 + 2(a-p)\theta)}{b^2} = \frac{(a-p)^2 + \mathbb{E}(\theta^2) + 2(a-p)\mathbb{E}(\theta)}{b^2} = \frac{(a-p)^2 + \sigma^2}{b^2}$ , since  $\mathbb{E}(\theta) = 0$  and  $\mathbb{E}(\theta^2) = \sigma^2$ . The monopolist's program is :

$$\mathcal{P}_{Mo} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{p\} \end{array} \right. \mathbb{E}(\pi) = p \left( \frac{a-p}{b} \right) - c_1 \left( \frac{a-p}{b} \right) - \frac{c_2}{2b^2} \left( (a-p)^2 + \sigma^2 \right). \quad (1.6)$$

The FOC of the program (2.6) gives us the price chosen by the monopolist  $p^{M02} = \max\left\{\frac{ab+ac_2+bc_1}{2b+c_2}, 0\right\}$ . As  $c_2 > -2b$  the SOC is verified. Thus the quantity produced by the monopoly is  $Q^{M02} = \max\left\{\frac{a-c_1}{2b+c_2} + \frac{\theta}{b}, 0\right\}$  and  $\mathbb{E}(\pi^{M02}) = \frac{(a-c_1)^2}{2(2b+c_2)} - \frac{c_2\sigma^2}{2b^2}$ .

- 4) Using these results we get  $\mathbb{E}(\pi^{M01}) - \mathbb{E}(\pi^{M02}) = \frac{c_2\sigma^2}{2b^2}$ . Hence if  $c_2$  is negative, the marginal curve is decreasing and the monopolist prefers to choose the price. The monopolist is indifferent between setting price or quantity only when the marginal cost is constant. In the other case he prefers to choose the quantity. With a linear demand and an additive shock, expected output setting the price equals the output level when the monopolist sets the quantity. But also the expected price setting the quantity equals the price level chosen when the monopolist sets the price. So whatever the strategy the monopolist chooses the expected revenue is the same. The difference in terms of expected profits comes only from the relative size of expected costs. For convex, i.e.  $c_2 > 0$ , (concave) costs, a fixed level of output is more (less) attractive than a random level with a same mean. The firm so prefers setting quantity (price).

Let us name  $Q^*$  the *ex post* profit-maximizing quantity given  $\theta$  in order to make an alternative explanation. For a graphical interpretation refer to Figure 2.4, which compares for a particular realization of the random variable  $\theta$  the profit done by the monopolist setting the quantity, gray area, and the profit done by setting the price, gray plus blue minus red area. It is so better to set price, for the monopolist, if the blue area is greater than the red area. Since the marginal revenue curve,  $Rm(Q)$ , is twice as steep as the demand curve  $RM(Q)$ ,  $Q^*$  is halfway between  $Q^{M01}$  and  $Q^{M02}$  represented by the green dash when the marginal cost curve is flat (Figure 2.4b). In this case blue area equals to red area so the monopolist is indifferent between setting price or quantity. When marginal cost curve slopes upward  $Q^*$  is closer to  $Q^{M01}$  which implies geometrically that the blue area is smaller than the red one (Figure 2.4a). It is better for the monopolist to set the quantity. By the opposite when the marginal cost curve slopes downward (Figure 2.4c)  $Q^*$  is closer to  $Q^{M02}$  which implies that the blue area is greater than the red one and so it is profitable to set the price.

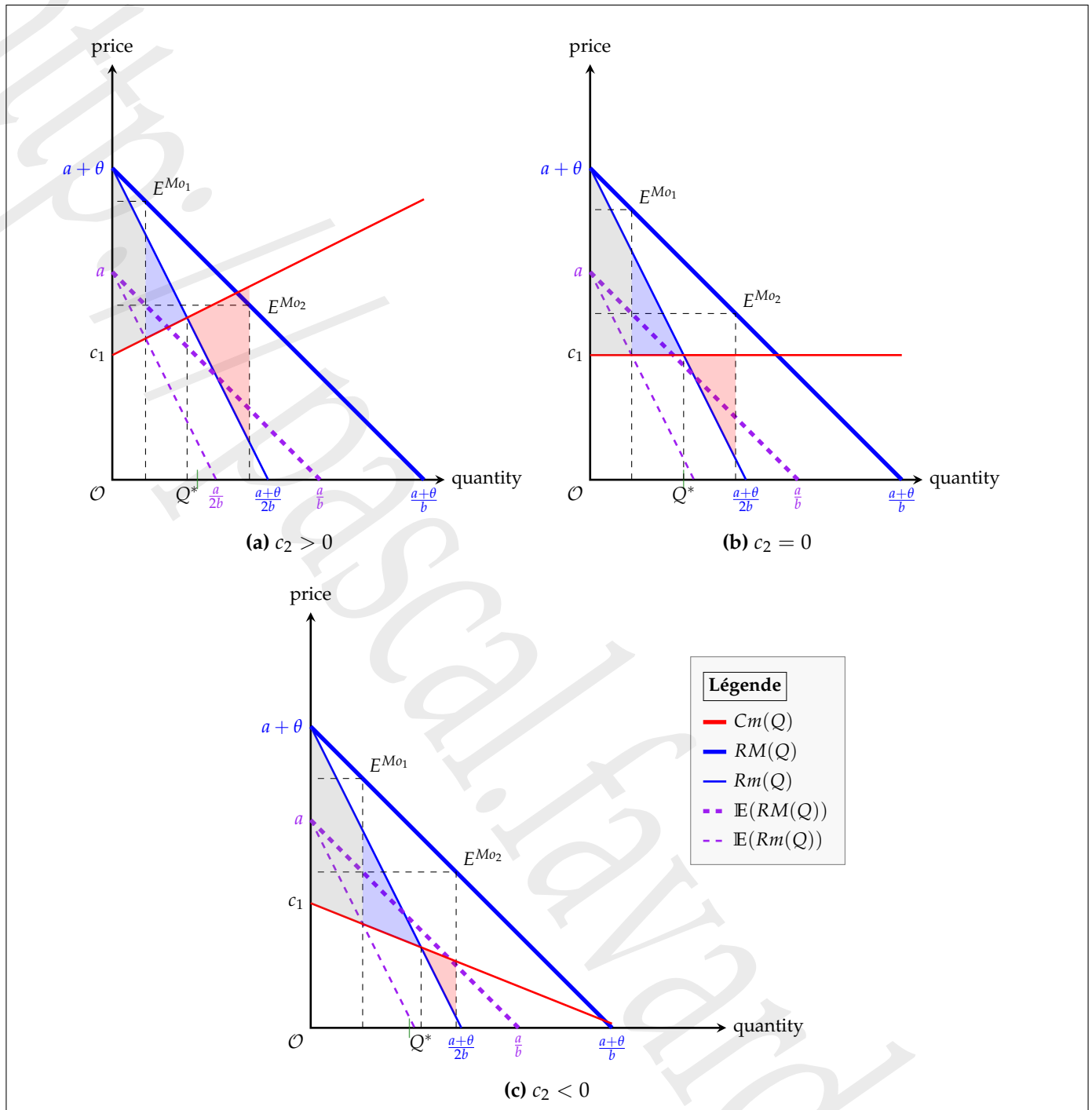


Figure 1.1 : Setting price or quantity ?

5) Using (2.3) and (2.4)

$$\begin{cases} q_1 = \max\left\{\frac{a + \theta}{b + d} + \frac{dp_2 - bp_1}{b^2 - d^2}, 0\right\}, & (1.7) \\ q_2 = \max\left\{\frac{a + \theta}{b + d} + \frac{dp_1 - bp_2}{b^2 - d^2}, 0\right\}. & (1.8) \end{cases}$$

Since  $b > d > 0$  the cross-price elasticities are positive, goods are substitutes.

6) When  $d = 0$  demands are independent and when  $b = d \neq 0$  the goods produced by the duopolists are perfect substitutes.

7)  $j$  setting the quantity and choosing the level  $q_j$ , the  $i$ 's inverse residual demand is  $p_i = \max\{a - bq_i - dq_j + \theta, 0\}$  and his residual demand is  $q_i = \max\left\{\frac{a + \theta - dq_j - p_i}{b}, 0\right\}$

i. Using  $i$ 's inverse residual demand,  $\mathbb{E}(\pi_i) = \mathbb{E}((a - bq_i - dq_j + \theta)q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2)$ . As  $\mathbb{E}(\theta) = 0$ , the duopolist  $i$  setting the quantity has to solve :

$$\mathcal{P}_{Duo} \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{\{q_i\}} \mathbb{E}(\pi_i) = (a - bq_i - dq_j) q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2 \end{array} \right. \quad (1.9)$$

The FOC of the optimization program (2.9) gives us  $q_i(q_j) = \max\{\frac{a-c_1-dq_j}{2b+c_2}, 0\}$  and the SOC is  $c_2 > -2b$  which is true since  $c_2 > -\frac{2(b^2-d^2)}{b}$ . Then the clearing-market price is  $p_i = \max\{\frac{ab+bc_1+ac_2-dq_j(b+c_2)}{2b+c_2} + \theta, 0\}$ . Thus best-response payoff is :  $\mathbb{E}(\pi_i(q_j)) = \frac{(a-c_1-dq_j)^2}{2(2b+c_2)}$ .

ii. Using  $i$ 's residual demand,  $\mathbb{E}(\pi_i) = \mathbb{E}((\frac{a+\theta-dq_j-p_i}{b})p_i - c_1(\frac{a+\theta-dq_j-p_i}{b}) - \frac{c_2}{2}(\frac{a+\theta-dq_j-p_i}{b})^2)$ . Then duopolist's program is :

$$\mathcal{P}_{Duo} \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{\{p_i\}} \mathbb{E}(\pi_i) = \left(\frac{a-dq_j-p_i}{b}\right) p_i - c_1 \left(\frac{a-dq_j-p_i}{b}\right) - \frac{c_2}{2} \left(\frac{a-dq_j-p_i}{b}\right)^2 - \frac{c_2\sigma^2}{2b^2} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

The FOC of the optimization program (2.10) gives us  $p_i(q_j) = \max\{\frac{ab+bc_1+ac_2-dq_j(b+c_2)}{2b+c_2}, 0\}$  and the SOC is  $c_2 > -2b$  which is true since  $c_2 > -\frac{2(b^2-d^2)}{b}$ . The  $i$ 's residual quantity demanded is  $q_i = \max\{\frac{a-c_1-dq_j}{2b+c_2} + \frac{\theta}{b}, 0\}$ . Thus best-response payoff is :  $\mathbb{E}(\pi_i(q_j)) = \frac{(a-c_1-dq_j)^2}{2(2b+c_2)} - \frac{c_2\sigma^2}{2b^2}$ .

8)  $j$  setting the price and choosing the level  $p_j$ , the  $i$ 's residual demand is  $q_i = \max\{\frac{a+\theta}{b+d} + \frac{dp_j-bp_i}{b^2-d^2}, 0\}$  and his inverse residual demand is  $p_i = \max\{\frac{1}{b}[(a+\theta)(b-d) + dp_j - (b^2-d^2)q_i], 0\}$ .

i. Using  $i$ 's inverse residual demand,  $\mathbb{E}(\pi_i) = \mathbb{E}((\frac{1}{b}[(a+\theta)(b-d) + dp_j - (b^2-d^2)q_i])q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2)$ . As  $\mathbb{E}(\theta) = 0$ ,  $\mathbb{E}(\pi_i) = (\frac{1}{b}[a(b-d) + dp_j - (b^2-d^2)q_i])q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2$ . Using new notations we could rewrite this expected profit :  $\mathbb{E}(\pi_i) = (\alpha + \gamma p_j - \beta q_i)q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2$ . The duopolist  $i$  setting the quantity has to solve (2.9) putting  $(\alpha, \beta, \gamma p_j, \Theta)$  instead of  $(a, b, -dq_j, \theta)$  so without calculus we get  $q_i(p_j) = \max\{\frac{\alpha-c_1+\gamma p_j}{2\beta+c_2}, 0\}$  and  $p_i = \max\{\frac{\alpha\beta+\beta c_1+ac_2+\gamma p_j(\beta+c_2)}{2\beta+c_2} + \Theta, 0\}$ . Thus  $\mathbb{E}(\pi_i(p_j)) = \frac{(\alpha-c_1+\gamma p_j)^2}{2(2\beta+c_2)}$ . Note that the SOC is  $c_2 > -2\beta$  so  $c_2 > -\frac{2(b^2-d^2)}{b}$ , which is true under ours assumptions.

ii. Using  $i$ 's residual demand,  $\mathbb{E}(\pi_i) = \mathbb{E}((\frac{\alpha+\gamma p_j-p_i+\Theta}{\beta})p_i - c_1(\frac{\alpha+\gamma p_j-p_i+\Theta}{\beta}) - \frac{c_2}{2}(\frac{\alpha+\gamma p_j-p_i+\Theta}{\beta})^2)$ , the duopolist  $i$  setting the price has to solve (2.10) putting  $(\alpha, \beta, \gamma p_j, \Theta)$  instead of  $(a, b, -dq_j, \theta)$  so without calculus we get  $p_i(p_j) = \max\{\frac{\alpha\beta+\beta c_1+ac_2+\gamma p_j(\beta+c_2)}{2\beta+c_2}, 0\}$  and thus  $q_i = \max\{\frac{\alpha-c_1+\gamma p_j}{2\beta+c_2} + \frac{\Theta}{\beta}, 0\}$ . Thus  $\mathbb{E}(\pi_i(p_j)) = \frac{(\alpha-c_1+\gamma p_j)^2}{2(2\beta+c_2)} - \frac{c_2\Sigma^2}{2\beta^2}$ . Note that the SOC is  $c_2 > -2\beta$  so  $c_2 > -\frac{2(b^2-d^2)}{b}$ , which is true under ours assumptions.

9) As the expected payoff when  $i$  setting quantity minus his expected payoff setting price is equal to  $-\frac{c_2\sigma^2}{2b^2}$  or  $-\frac{c_2\Sigma^2}{2\beta^2}$ , then :

i. if  $c_2 > 0$ , then it is a dominant strategy for both firms to set quantities. There is so an unique Cournot equilibrium.

ii. if  $c_2 < 0$ , then it is a dominant strategy for both firms to set prices. There is so an unique Bertrand equilibrium.

iii. if  $c_2 = 0$ , firms are indifferent between choosing prices and quantities. There are four Nash equilibria in pure strategies :  $NE = \{(price, quantity), (quantity, price), (quantity, quantity), (price, price)\}$ .

10) No uncertainty in our model is equivalent to assume  $\sigma = 0$ , so  $\Sigma = 0$ . Then  $i$  is indifferent between choosing quantity and price whatever  $j \neq i$  setting. There are four Nash equilibria in pure



strategies :  $NE = \{(price, quantity), (quantity, price), (quantity, quantity), (price, price)\}$ .

### Exercice 3 : Dupont & Dupond

On considère deux entreprises concurrentes, Dupont et Dupond, produisant des postiches imparfaitement substituables. La demande de postiches produit par l'entreprise  $i, i = 1, 2$  est telle que :

$$q_i(p_i, p_j) = 20 - p_i + p_j, (i \neq j), \quad (1.1)$$

avec  $p_1$  et  $p_2$  les prix fixés par les deux entreprises. Leurs coûts marginaux sont nuls.

Supposons que les deux entreprises fixent leurs prix simultanément.

1 – Déterminez les fonctions de réaction des deux entreprises. Représentez-les graphiquement.

2 – Déduisez-en les équilibres de Nash.

3 – Déterminez les quantités de marché et les profits respectifs des deux entreprises.

Supposons que l'entreprise 1 fixe  $p_1$  en premier. L'entreprise 2 observe  $p_1$  et fixe  $p_2$  ensuite.

4 – Quel est le prix fixé par chaque entreprise à l'équilibre ?

5 – Quelles sont les quantités vendues et les profits réalisés ?

6 – Une entreprise préfère-t-elle être meneuse, suiveuse ou jouer simultanément ?

### Solution :

1) Le programme de l'entreprise  $i$  est :

$$\mathcal{P}_i \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{p_i\} \end{array} p_i q_i(p_i, p_j) - C(q_i(p_i, p_j)) \right. \quad (1.2)$$

$$\text{d'où : } 20 - p_i + p_j - p_i = 0 \Leftrightarrow p_i^*(p_j) = 10 + \frac{p_j}{2}$$

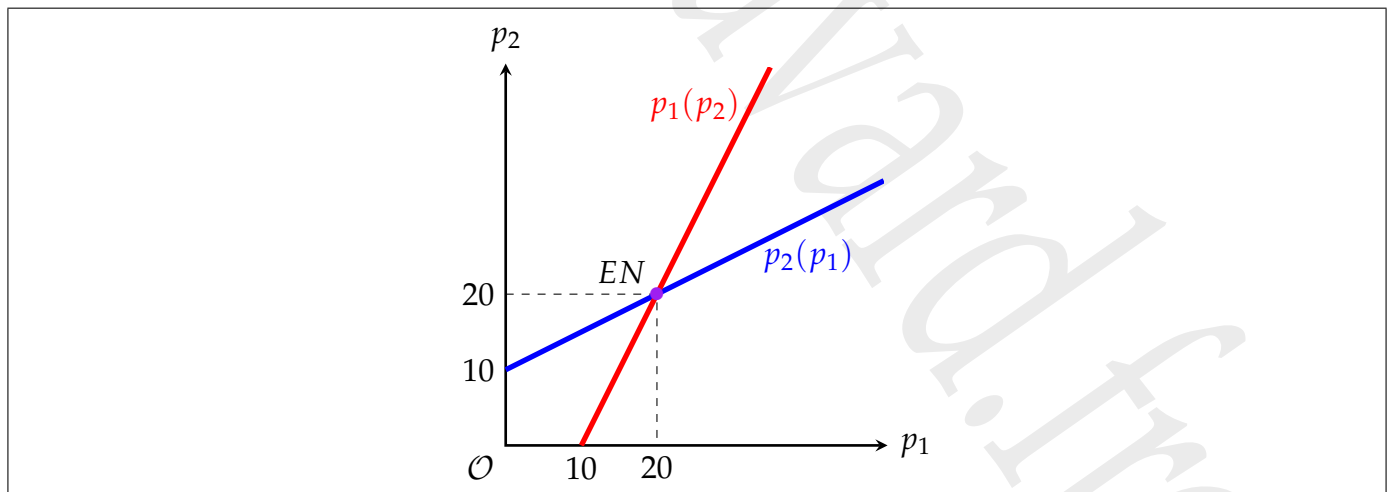


Figure 1.2 : Meilleures réponses

2) Il y a un seul équilibre de Nash :  $EN = [p_1^*, p_2^*] = [20, 20]$ .

3) À l'équilibre :  $(q_1^*, q_2^*) = (20, 20)$  et  $\pi_1^* = \pi_2^* = 400$ .

4) Le programme de l'entreprise 2 est donné par (1.2), donc  $p_2^*(p_1) = 10 + \frac{p_1}{2}$ . Le programme de l'entreprise 1 est alors :

$$\mathcal{P}_1 \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{p_1\} \end{array} p_1 q_1 \left( p_1, 10 + \frac{p_1}{2} \right) \right. \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow p_1^* = 30 \text{ et donc } p_2^*(30) = 25 < 30.$$

- 5) À l'équilibre :  $(q_1^*, q_2^*) = (15, 25)$  et  $(\pi_1^*, \pi_2^*) = (450, 625)$ .
- 6) Rendre séquentiel ce jeu augmente le profit des deux entreprises. La situation du meneur s'améliore moins que celle du suiveur  $\pi_1^* < \pi_2^*$ . La séquentialité limite la « concurrence ».

**Exercice 4 : Cournot Vs Stackelberg**

Soit deux entreprises produisant un bien homogène avec un coût marginal noté  $c$  et faisant face à une fonction inverse de demande :

$$P(Q) = \max\{0; a - bQ\},$$

où  $Q$  est la quantité totale produite par les deux entreprises,  $a \geq 0, b \geq 0$  et le marché est « rentable » (i.e.  $a > c$ ). Le meneur ( $En_1$ ) a la possibilité de produire une quantité de bien  $q_{11}$  en première période, cette quantité sera stockée pour être vendue en fin de seconde période. On supposera qu'il n'y a aucun coût de stockage. Le suiveur ( $En_2$ ) observe parfaitement  $q_{11}$ . En seconde période, les deux entreprises produisent. Soit  $q_{12}$  (resp.  $q_2$ ) la quantité de bien produite par  $En_1$  (resp.  $En_2$ ) en seconde période. La quantité totale de bien mise sur le marché en fin de seconde période est donc  $Q = q_{11} + q_{12} + q_2$ .

- 1 – Si le jeu se réduisait à la seconde période comment pourrait-on le nommer ?
- 2 – Déterminez à  $q_{11}$  fixé les meilleures réponses  $q_{12}^*(q_2; q_{11})$  et  $q_2^*(q_{12}; q_{11})$  dans le sous-jeu de seconde période.
- 3 – Tracez les courbes de meilleures réponses, avec en abscisse l'action du meneur en seconde période.
- 4 – Déterminez en fonction des valeurs de  $q_{11}$ , l'équilibre de Nash en stratégies pures du jeu en quantité de seconde période.
- 5 – En calculant la valeur de  $q_{11}$  qui permet au meneur de maximiser son profit, déterminez l'équilibre parfait en sous-jeu dans ce jeu à la Stackelberg.
- 6 – Comparez le modèle de Stackelberg classique, recalculez les résultats obtenus en cours, avec le modèle étudié ci-dessus.

**Solution :**

- 1) Si le jeu se réduisait à un jeu simultané, où les stratégies sont des quantités, on serait dans un modèle « à la Cournot » classique. Chaque joueur (entreprise) choisit la quantité qu'il produit en tenant compte de la meilleure réponse de l'autre à sa production.
- 2) Il faut donc résoudre ce jeu « à la Cournot », la production du meneur en première période étant un paramètre. Le profit du meneur  $\pi_1$  est tel que :

$$\pi_1(q_{12}; q_2, q_{11}) = (a - b(q_{11} + q_{12} + q_2) - c)(q_{11} + q_{12}),$$

et le profit du suiveur  $\pi_2$  est tel que :

$$\pi_2(q_2; q_{12}, q_{11}) = (a - b(q_{11} + q_{12} + q_2) - c)q_2.$$

Le programme du meneur est donc :

$$\text{Max}_{q_{12}} \pi_1(q_{12}; q_2, q_{11})$$

la CN1 :

$$\frac{d\pi_1}{dq_{12}} \Big|_* = (a - b(q_{11} + q_{12} + q_2) - c) - b(q_{11} + q_{12}) = 0$$

$$\Leftrightarrow q_{12} = \frac{a - c}{2b} - \frac{q_2}{2} - q_{11}$$

la CS2 :

$$\frac{d^2\pi_1}{dq_{12}^2} = -2b < 0$$

La CN1 est donc une condition suffisante. La fonction de meilleure réponse du meneur en tenant compte des contraintes de positivité est :  $q_{12}^*(q_2; q_{11}) = \max \left\{ \frac{a - c}{2b} - \frac{q_2}{2} - q_{11}; 0 \right\}$ .

Le programme du suiveur est :

$$\text{Max}_{q_2} \pi_2(q_2; q_{12}, q_{11})$$

la CN1 :

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} \Big|_* = (a - b(q_{11} + q_{12} + q_2) - c) - bq_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow q_2 = \frac{a - c}{2b} - \frac{q_{11} + q_{12}}{2}$$

la CS2 :

$$\frac{d^2\pi_2}{dq_2^2} = -2b < 0$$

La CN1 est donc une condition suffisante. La fonction de meilleure réponse du suiveur en tenant compte des contraintes de positivité est :  $q_2^*(q_{12}; q_{11}) = \max \left\{ \frac{a - c}{2b} - \frac{q_{11} + q_{12}}{2}; 0 \right\}$

3) Les fonctions de meilleures réponses trouvées à la question précédente sont linéaires par morceaux.

La production de meneur en première période étant ici un paramètre du « sous-modèle » comme  $a$ ,  $b$  ou même  $c$ . Étudions ces deux fonctions de réactions. La pente de la droite de meilleure réponse du meneur  $MR_m$  est de  $-2$  alors que celle de la droite de meilleure réponse du suiveur  $MR_s$  est de  $-\frac{1}{2}$ . L'abscisse à l'origine de  $MR_m$  qui est  $(\frac{a-c}{2b} - q_{11})$  est toujours plus petite que l'abscisse à l'origine de  $MR_s$  qui est  $(\frac{a-c}{b} - q_{11})$ . En revanche, l'ordonnée à l'origine de  $MR_m$ ,  $(\frac{a-c}{b} - 2q_{11})$ , peut être plus petite ou plus grande que l'ordonnée à l'origine de  $MR_s$  qui est  $(\frac{a-c}{2b} - \frac{q_{11}}{2})$ . Si :

$$\frac{a - c}{b} - 2q_{11} > \frac{a - c}{2b} - \frac{q_{11}}{2} \Leftrightarrow q_{11} < \frac{a - c}{3b}$$

on est dans le cas 1 et sinon dans le cas 2, sur la figure ci-dessous.

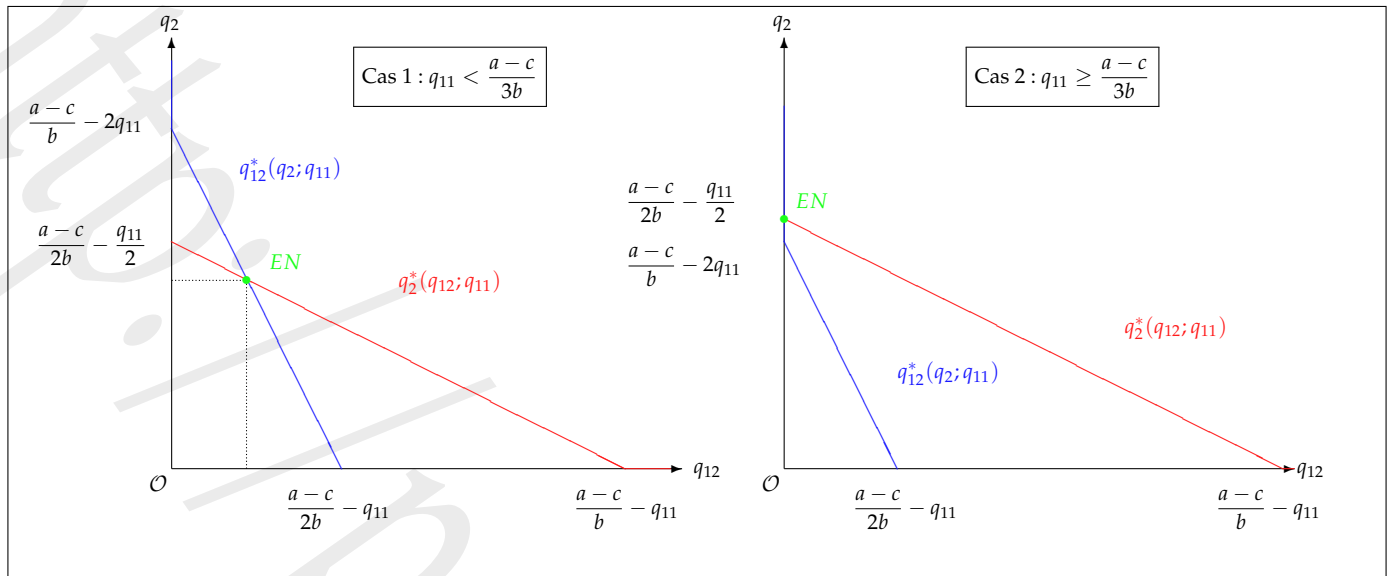


Figure 1.3 : EN

Il y a donc deux types d'équilibres de Nash : le premier type où les deux entreprises produisent en seconde période et un second type où seul le suiveur produit en seconde période.

4) En reprenant les fonctions de meilleures réponses nous avons, si on ne tient pas compte des contraintes de positivité, le système à deux équations et deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} q_{12} = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2} - q_{11} \\ q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_{11} + q_{12}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q_{12} = \frac{a-c-3bq_{11}}{3b} \\ q_2 = \frac{a-c}{3b} \end{cases}$$

Comme on l'a vu sur la figure ci-dessus, \$q\_{12}\$ est différent de zéro si \$q\_{11} < \frac{a-c}{3b}\$. Si \$q\_{12} = 0\$ alors \$q\_2 = \frac{a-c-bq\_{11}}{2b}\$. Nous avons parfaitement déterminé les équilibres de Nash \$EN\_{SP} = (q\_{12}^\*(q\_{11}), q\_2^\*(q\_{11}))\$ pour tout \$q\_{11} < \frac{a}{b}\$ (i.e. condition de positivité de la demande inverse). Mais si \$q\_{12} = 0\$ alors \$q\_2 > 0 \Leftrightarrow q\_{11} < \frac{a-c}{b} < \frac{a}{b}\$. Donc :

$$EN_{SP} = \begin{cases} \left( \frac{a-c-3bq_{11}}{3b}, \frac{a-c}{3b} \right), \text{ si } q_{11} \in \left[ 0, \frac{a-c}{3b} \right) \\ \left( 0, \frac{a-c-bq_{11}}{2b} \right), \text{ si } q_{11} \in \left[ \frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{b} \right) \end{cases}$$

5) On peut à présent réécrire le profit du leader en tenant compte des résultats précédents :

$$\pi_1(q_{11}, q_{12}^*; q_2^*) = \begin{cases} \frac{(a-c)^2}{9b}, \text{ si } q_{11} \in \left[ 0, \frac{a-c}{3b} \right) \\ \frac{q_{11}(a-c-bq_{11})}{2}, \text{ si } q_{11} \in \left[ \frac{a-c}{3b}, \frac{a-c}{b} \right) \end{cases}$$

Lorsqu'en première période le meneur a produit moins que la « quantité de Cournot », il complète en seconde période de telle sorte que sa production totale sur les deux périodes soit égale à cette fameuse quantité. Il est donc normal que son profit soit indépendant de sa production de première

période. Notons que s'il y avait un coût du stockage les résultats seraient modifiés. Si en première période le meneur produit plus que la quantité de Cournot alors il doit résoudre le programme suivant :

$$\text{Max}_{\{q_{11}\}} \pi_1(q_{11}, 0; q_2^*) = \left( \frac{a - c - bq_{11}}{2} \right) q_{11}$$

la CN1 :

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_1}{dq_{11}} \Big|_* &= \frac{a - c}{2} - bq_{11} = 0 \\ \Leftrightarrow q_{11} &= \frac{a - c}{2b} \end{aligned}$$

la CS2 :

$$\frac{d^2\pi_1}{dq_{11}^2} = -b > 0$$

La CN1 est donc une condition suffisante. Dans ce cas, le suiveur produit :

$$q_2 = \frac{a - c}{4b}$$

et le meneur ne produit qu'en première période, son profit est donc :

$$\pi_1 \left( \frac{a - c}{2b}, 0; \frac{a - c}{4b} \right) = \frac{(a - c)^2}{8b}.$$

Il suffit de comparer les profits du meneur dans les deux cas. On montre que le meneur doit produire seulement en première période et produire plus que la quantité de Cournot. En effet :

$$\frac{(a - c)^2}{8b} > \frac{(a - c)^2}{9b} \Leftrightarrow 9 > 8$$

ce qui est vrai. L'équilibre parfait en sous-jeu est noté *EPSJ* et donc est tel que :

$$EPSJ = \left( \left( \frac{a - c}{2b}, 0 \right), \frac{a - c}{4b} \right).$$

6) En fait, on trouve exactement les mêmes résultats que dans le modèle de Stackelberg classique.

**Exercice 5 : Bonne ou mauvaise, c'est la qualité qui compte !**

Un monopole peut fabriquer un bien de bonne ou de mauvaise qualité. S'il produit un bien de bonne qualité (resp. de mauvaise qualité), la quantité produite sera notée,  $\bar{Q}$  (resp.  $\underline{Q}$ ). Le coût moyen de production est constant et égal à  $\bar{c}$  ou à  $\underline{c}$ , suivant la qualité produite. La fonction inverse de demande pour le bien de bonne qualité est  $p = \bar{a} - Q$  et pour le bien de mauvaise qualité  $p = \underline{a} - Q$ , avec  $\bar{a} - \underline{a} > \bar{c} - \underline{c} > 0$ . On supposera que tout agent intervenant sur ce marché a un taux d'actualisation constant et égal à  $\delta$ .

- 1 – Calculez, tout d'abord, l'équilibre de marché si les consommateurs observent la qualité du bien avant de l'acheter.
- 2 – Déterminez l'équilibre de Nash en stratégies pures si l'information est asymétrique : les consommateurs n'observent la qualité du bien qu'après l'avoir acheté. Commentez.
- 3 – Supposons que le jeu soit répété dix fois, quel est l'EPSJ du jeu ? Commentez.
- 4 – Supposons que le jeu soit répété à l'infini, combien y a-t-il d'équilibres ?

5– Les consommateurs ont, en fait, le comportement suivant : ils anticipent que le bien est de bonne qualité si, durant les trois périodes précédentes, il l'était. Sinon, ils anticipent un bien de mauvaise qualité. Quelle qualité va produire le monopole ? Justifiez et commentez votre réponse.

### Solution :

1) Dans le cas général le programme de ce monopole est :

$$\text{Max}_{\{Q\}} \pi(Q) = (a - Q)Q - cQ$$

La CN1 de ce programme est :

$$\begin{aligned} \frac{d\pi(Q)}{dQ} \Big|_* &= a - c - 2Q = 0 \\ \Rightarrow Q &= \frac{a - c}{2} > 0. \end{aligned}$$

La CN2 de ce programme est :

$$\frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2} = -2 < 0.$$

Donc le monopole produit  $Q^* = \frac{a - c}{2}$  avec  $p(Q^*) = a - Q^* = \frac{a + c}{2}$ . Son profit, qui est aussi son surplus net puisqu'il n'y a pas de coût fixe, est  $\pi^* = (a - c - Q^*)Q^* = \left(\frac{a - c}{2}\right)^2$ . Le surplus net des consommateurs,  $\mathcal{SC}$ , est égal à l'aire du triangle  $[(0, p(Q^*)), (0, a), (Q^*, p(Q^*))]$ . On a donc :  $\mathcal{SC} = \frac{(a - p(Q^*))Q^*}{2} = \frac{(a - c)^2}{8}$ . Suivant que le monopole produit un bien de bonne qualité ou de mauvaise qualité on a :

Qualité :	basse		haute
$Q^*$	$\frac{a - c}{2}$	<	$\frac{\bar{a} - \bar{c}}{2}$
$p(Q^*)$	$\frac{a + c}{2}$	<	$\frac{\bar{a} + \bar{c}}{2}$
$\pi^*$	$\left(\frac{a - c}{2}\right)^2$	<	$\left(\frac{\bar{a} - \bar{c}}{2}\right)^2$
$\mathcal{SC}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{a - c}{2}\right)^2$	<	$\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{a} - \bar{c}}{2}\right)^2$

Tableau 1.1 : Comparaisons par rapport à la qualité

puisque  $\bar{a} - \underline{a} > \bar{c} - \underline{c} > 0$ . Donc le monopole, en information parfaite, va produire un bien de bonne qualité. L'équilibre de marché est :  $E_M = (p^*, Q^*) = \left(\frac{\bar{a} + \bar{c}}{2}, \frac{\bar{a} - \bar{c}}{2}\right)$ . Le surplus des consommateurs est plus grand que lorsqu'il consomme le bien de mauvaise qualité, le surplus

social est donc plus grand. Produire le bien de bonne qualité permet donc d'atteindre l'optimum de Pareto.

- 2) Calculons le profit du monopole en fonction de son coût moyen de production et de la disposition maximale à payer des consommateurs,  $\pi(a, c)$ . Il suffit d'utiliser le cas général étudié à la question précédente :

$\pi(a, c)$	$\bar{a}$	$\underline{a}$
$\bar{c}$	$\left(\frac{\bar{a} - \bar{c}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\underline{a} - \bar{c}}{2}\right)^2$
$\underline{c}$	$\left(\frac{\bar{a} - \underline{c}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\underline{a} - \underline{c}}{2}\right)^2$

Tableau 1.2 : Matrice des profits

Montrons que  $\pi(\bar{a}, \underline{c}) > \pi(\bar{a}, \bar{c})$  :

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\bar{a} - \underline{c}}{2}\right)^2 > \left(\frac{\bar{a} - \bar{c}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \bar{a} - \underline{c} > \bar{a} - \bar{c} \Leftrightarrow \underline{c} < \bar{c},$$

vrai par hypothèse.

Montrons que  $\pi(\underline{a}, \underline{c}) > \pi(\underline{a}, \bar{c})$  :

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\underline{a} - \underline{c}}{2}\right)^2 > \left(\frac{\underline{a} - \bar{c}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \underline{a} - \underline{c} > \underline{a} - \bar{c} \Leftrightarrow \underline{c} < \bar{c},$$

vrai par hypothèse.

Le profit du monopoleur, à perception des consommateurs donnée, est toujours plus grand quand il choisit de produire le bien de mauvaise qualité. Donc, pour lui, produire le bien de mauvaise qualité est une stratégie dominante en information asymétrique. Les consommateurs l'anticipent et vont donc considérer que le monopole va produire un bien de mauvaise qualité. L'équilibre de Nash est donc :  $(p_{EN}, Q_{EN}) = \left(\frac{\underline{a} + \underline{c}}{2}, \frac{\underline{a} - \underline{c}}{2}\right)$ , et il n'est pas optimal au sens de Pareto.

- 3) Répéter le jeu dix fois ne changera rien au résultat précédent. En utilisant l'induction arrière, il est facile de voir que l'EPSJ de ce jeu répété en temps fini est en fait la répétition de l'équilibre de Nash du jeu statique.
- 4) Nous savons qu'en temps infini il y a une infinité d'équilibres.
- 5) Supposons que le monopole produise depuis plus de quatre périodes un bien de bonne qualité. A t-il intérêt de dévier une fois ? S'il dévie, il va gagner  $\pi(\bar{a}, \underline{c})$  puis pendant trois périodes  $\pi(\underline{a}, \bar{c})$ . S'il ne dévie pas, il gagne  $\pi(\bar{a}, \bar{c})$ . Il n'aura pas intérêt à dévier une fois si :

$$\begin{aligned} \pi(\bar{a}, \bar{c}) (1 + \delta + \delta^2 + \delta^3) &> \pi(\bar{a}, \underline{c}) + \pi(\underline{a}, \bar{c}) (\delta + \delta^2 + \delta^3) \\ \Leftrightarrow \delta + \delta^2 + \delta^3 &> \frac{\pi(\bar{a}, \underline{c}) - \pi(\bar{a}, \bar{c})}{\pi(\bar{a}, \bar{c}) - \pi(\underline{a}, \bar{c})} \end{aligned}$$



Soit  $\tilde{\delta}$  tel que  $\tilde{\delta} + \tilde{\delta}^2 + \tilde{\delta}^3 = \frac{\pi(\bar{a}, \underline{c}) - \pi(\bar{a}, \bar{c})}{\pi(\bar{a}, \bar{c}) - \pi(\underline{a}, \bar{c})}$ , si  $\delta > \tilde{\delta}$  alors le monopole a toujours intérêt à produire le bien de bonne qualité. Pour que le monopole ait intérêt à préserver sa réputation, il faut que son taux d'actualisation soit « assez élevé ». Notons que  $\tilde{\delta}$  est d'autant plus élevé que  $\pi(\bar{a}, \underline{c}) - \pi(\bar{a}, \bar{c})$  est grand, donc que le gain a « berné » et d'autant moins élevé que  $\pi(\bar{a}, \bar{c}) - \pi(\underline{a}, \bar{c})$  est faible, donc que le coût à se refaire une réputation.

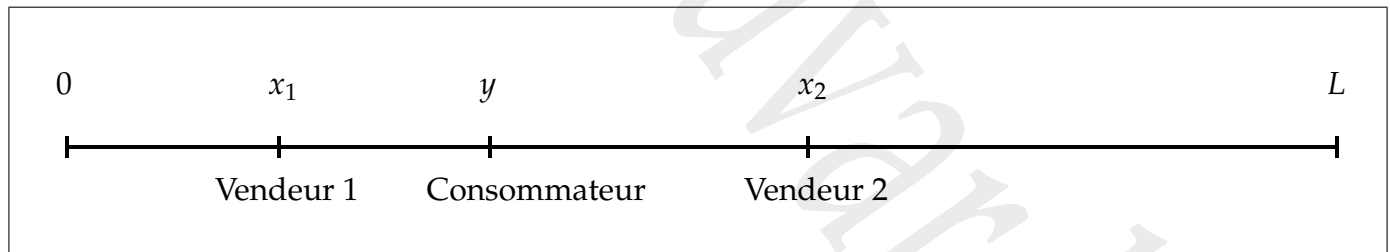
**Exercice 6 : Une plage linéaire...**

Le modèle d'Hotelling est un modèle de différenciation des biens sur un marché duopolistique. Soit une plage de sable blanc parfaitement linéaire d'une longueur  $L$  sur laquelle les vacanciers sont uniformément répartis. Deux vendeurs  $i = 1, 2$  de glaces désirent s'installer sur cette plage. Chaque vacancier achète au plus une glace. Pour se faire il doit parcourir la distance  $d$  qui le sépare du vendeur qu'il choisit. Chaque mètre parcouru a un coût  $c$  pour lui. Une glace coûte  $p_i$  euros chez le vendeur  $i$ . Il n'y a qu'un type de glace, le bien est donc homogène. La fonction d'utilité d'un consommateur est  $U(p_i, d) = u_0 - p_i - cd$ .

- 1 – Décrivez l'ensemble des joueurs et leur ensemble de stratégies.
- 2 – Si  $p_1 = p_2 = p$  et  $u_0 = 0$  et que chaque consommateur achète une glace où doivent s'installer les deux marchands ?
- 3 – Si  $p_1 \neq p_2$  et  $u_0 = 0$  et que chaque consommateur achète une glace où doivent s'installer les deux marchands ?
- 4 – Si  $p_1 \neq p_2$  et  $u_0 > 0$  y a-t-il des solutions différentes ?

**Solution :**

- 1) Deux joueurs (les glaciers) et les stratégies sont des prix ( $\in [0, +\infty[$ ) et des localisations ( $\in [0, L]$ ).



**Figure 1.4 :** Géolocalisation : Marchands de glaces

Le consommateur localisé à  $y$  mètre du début de la plage va chez le vendeur 1 ssi :

$$p + c|x_1 - y| < p + c|x_2 - y| \Leftrightarrow |x_1 - y| < |x_2 - y|$$

- i. Si  $y < x_1$  alors (1)  $\Leftrightarrow x_1 - y < x_2 - y \Leftrightarrow x_1 < x_2$  vrai par construction.
- ii. Si  $x_2 \geq y \geq x_1$  alors (1)  $\Leftrightarrow y - x_1 < x_2 - y \Leftrightarrow y < \tilde{y} = \frac{x_1 + x_2}{2}$ .
- iii. Si  $y > x_2$  alors (1)  $\Leftrightarrow y - x_1 < y - x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$  faux par construction.

$$D_1(p) = \tilde{y} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \pi_1(p) = p \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Le profit du vendeur 1 est croissant en  $x_1$ , il doit se rapprocher par la gauche de l'autre vendeur.

$$D_2(p) = L - \tilde{y} = L - \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \pi_2(p) = p \left[ L - \frac{x_1 + x_2}{2} \right]$$



Le profit du vendeur 2 est décroissant en  $x_2$ , il doit se rapprocher par la droite de l'autre vendeur. Si les glaciers se positionnent de façon symétrique, ils font le même profit mais chacun a intérêt à dévier ; sauf au centre de la plage (EN). Principe de différenciation minimale.

Le consommateur localisé à  $y$  mètres du début de la plage va chez le vendeur 1 ssi :

$$p_1 + c|x_1 - y| < p_2 + c|x_2 - y|$$

i. Si  $y < x_1$  alors (1)  $\Leftrightarrow p_1 + c(x_1 - y) < p_2 + c(x_2 - y) \Leftrightarrow p_1 < p_2 + c(x_2 - x_1)$

ii. Si  $x_2 \geq y \geq x_1$  alors (1)  $\Leftrightarrow p_1 - c(x_1 - y) < p_2 + c(x_2 - y) \Leftrightarrow y < \tilde{y} = \frac{p_2 - p_1}{2c} + \frac{x_1 + x_2}{2}$

iii. Si  $y > x_2$  alors (1)  $\Leftrightarrow p_1 - c(x_1 - y) < p_2 - c(x_2 - y) \Leftrightarrow p_1 < p_2 - c(x_2 - x_1)$

$$D_1(p_1; p_2) = \begin{cases} L & \text{si } p_1 < p_2 - c(x_2 - x_1) = \underline{p}_1 \\ \frac{p_2 - p_1}{2c} + \frac{x_1 + x_2}{2} & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } p_1 > p_2 + c(x_2 - x_1) = \overline{p}_1 \end{cases}$$

Avec  $D_1(\underline{p}_1; p_2) = x_2$  et  $D_1(\overline{p}_1; p_2) = x_1$

$$\pi_1(p_1; p_2) = \begin{cases} p_1 L & \text{si } p_1 < \underline{p}_1 \\ \frac{p_1 p_2 - p_1^2}{2c} + p_1 \frac{x_1 + x_2}{2} & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } p_1 > \overline{p}_1 \end{cases}$$

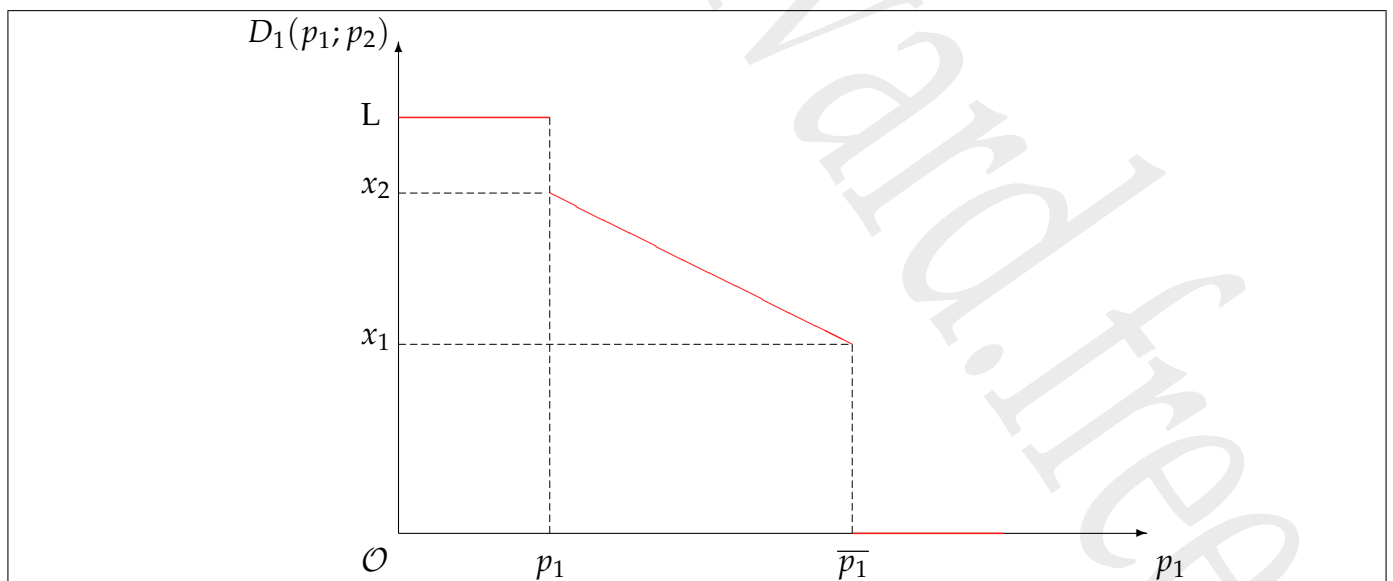


Figure 1.5 : Marchands de glaces

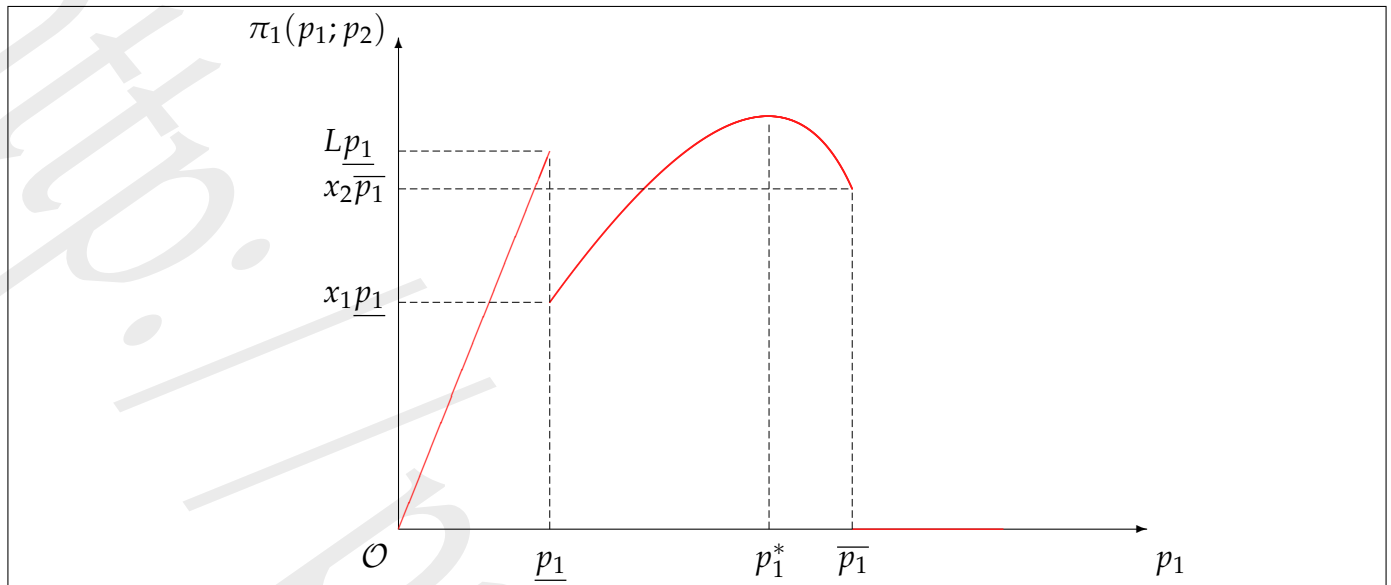


Figure 1.6 : Marchands de glaces

$$CN1 : \frac{\partial \pi_1(p_1; p_2)}{\partial p_1} = \frac{p_2 - 2p_1}{2c} + \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow p_1^* = \frac{p_2 + c(x_2 + x_1)}{2}$$

$$CS2 : \frac{\delta^2 \pi_1(p_1; p_2)}{\delta p_1^2} = -\frac{1}{c} < 0, \text{ vérifiée.}$$

$$\Rightarrow \pi_1(p_1^*; p_2) = \frac{(p_2 + c(x_2 + x_1))^2}{2c},$$

avec :  $\pi_1(\underline{p}_1; p_2) < \pi_1(p_1^*; p_2) > \pi_1(\bar{p}_1; p_2)$ .

$$\Rightarrow MR_1(p_2) = \begin{cases} p_2 - c(x_2 - x_1) & \text{zone 1} \\ \frac{p_2 + c(x_2 + x_1)}{2} & \text{zone 2} \\ p_1 & \text{zone 3} \end{cases}$$

La fonction de réaction est donc discontinue.

Le consommateur localisé à  $y$  mètres du début de la plage va chez le vendeur 2 ssi :

$$p_1 + c|x_1 - y| > p_2 + c|x_2 - y|$$

i. Si  $y < x_1$  alors (1)  $\Leftrightarrow p_1 + c(x_1 - y) > p_2 + c(x_2 - y) \Leftrightarrow p_2 < p_1 - c(x_2 - x_1)$

ii. Si  $x_2 \geq y \geq x_1$  alors (1)  $\Leftrightarrow p_1 - c(x_1 - y) > p_2 + c(x_2 - y) \Leftrightarrow y > \tilde{y} = \frac{p_2 - p_1}{2c} + \frac{x_1 + x_2}{2}$

iii. Si  $y > x_2$  alors (1)  $\Leftrightarrow p_1 - c(x_1 - y) > p_2 - c(x_2 - y) \Leftrightarrow p_2 < p_1 + c(x_2 - x_1)$

$$D_2(p_2; p_1) = \begin{cases} L & \text{si } p_2 < p_1 - c(x_2 - x_1) = \underline{p}_2 \\ L - \frac{p_2 - p_1}{2c} - \frac{x_1 + x_2}{2} & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } p_2 > p_1 + c(x_2 - x_1) = \bar{p}_2 \end{cases}$$

Avec  $D_2(\underline{p}_2; p_1) = L - x_1$  et  $D_2(\overline{p}_2; p_1) = L - x_2$ .

$$\pi_2(p_2; p_1) = \begin{cases} p_2 L & \text{si } p_2 < \underline{p}_2 \\ p_2 L - \left[ \frac{p_2^2 - p_1 p_2}{2c} + p_2 \frac{x_1 + x_2}{2} \right] & \text{sinon} \\ 0 & \text{si } p_2 > \overline{p}_2 \end{cases}$$

$$\text{CN1 : } \frac{\delta \pi_2(p_2; p_1)}{\delta p_2} = L - \frac{2p_2 - p_1}{2c} - \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow p_2^* = \frac{p_1 + c(2L - x_2 - x_1)}{2}$$

$$\text{CS2 : } \frac{\delta^2 \pi_2(p_2; p_1)}{\delta p_2^2} = -\frac{1}{c} < 0, \text{ vérifiée.}$$

$$\Rightarrow \pi_2(p_2^*; p_1) = \frac{(p_2 + c(x_2 + x_1))^2}{2c}$$

Avec  $\pi_1(\underline{p}_1; p_2) < \pi_1(p_1^*; p_2) > \pi_1(\overline{p}_1; p_2)$ .

$$\Rightarrow MR_2(p_1) = \begin{cases} p_1 - c(x_2 - x_1) & \text{zone 1} \\ \frac{p_1 + c(2L - x_2 - x_1)}{2} & \text{zone 2} \\ p_2 & \text{zone 3} \end{cases}$$

La fonction de réaction est donc discontinue.

Si l'équilibre de Nash est en zone 2 :

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1^* = \frac{p_2^* + c(x_2 + x_1)}{2} = \frac{c(2L + x_2 + x_1)}{3} \\ p_2^* = \frac{p_1^* + c(2L - x_2 - x_1)}{2} = \frac{c(4L - x_2 - x_1)}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1(p_1^*; p_2^*) = \frac{(p_1^*)^2}{2} = \left[ \frac{c(2L + x_2 + x_1)}{3\sqrt{2}} \right]^2 \\ \pi_2(p_2^*; p_1^*) = \frac{(p_2^*)^2}{2} = \left[ \frac{c(4L - x_2 - x_1)}{3\sqrt{2}} \right]^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \pi_1(p_1^*; p_2^*)}{\partial x_1^*} > 0 \text{ et } \frac{\partial \pi_2(p_2^*; p_1^*)}{\partial x_2^*} < 0.$$

Le vendeur 1 a intérêt d'augmenter  $x_1$  et le vendeur 2 a intérêt de diminuer  $x_2$ , principe de différenciation minimale. L'équilibre en prix obtenu dans la zone 2 est donc très fragile par rapport à la localisation des firmes. Mais si  $x_1 = x_2$  la zone 2 disparaît puisque  $\underline{p}_i = \overline{p}_i$ . On est dans le cas d'un duopole à « la Bertrand » avec  $p_1^* = p_2^* = 0$  et les profits sont nuls. Par exemple si la localisation est symétrique,  $x_1 = L - x_2$ ,

**Exercice 7 : Cartel**

Deux firmes produisent un bien homogène. La demande inverse sur ce marché est donnée par  $p = 100 - Q$  et la fonction de coût de l'entreprise  $i$  est donnée par  $C_i(q_i) = 2q_i$ ,  $i = 1, 2$ .

- 1 – Déterminez l'équilibre de cette industrie si on est dans un jeu à la Cournot.
- 2 – Déterminez l'équilibre de cette industrie si un cartel égalitaire est formé.
- 3 – Déterminez l'équilibre de cette industrie si on répète le jeu dix fois.  $\delta$  est le facteur d'actualisation pour les deux entreprises.
- 4 – Déterminez l'équilibre de cette industrie si on répète le jeu infiniment, si un dévie l'autre jouera non-coopératif indéfiniment.
- 5 – Même question si la réputation se fait en une seule période.

**Solution :**

1) Le programme de l'entreprise  $i$ ,  $i \neq j$  est :

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_i} \pi_i(q_i) &= (100 - (q_i + q_j) - 2) q_i \\ \text{CN1 : } \frac{d\pi_i(q_i)}{dq_i} &= 98 - 2q_i - q_j = 0 \Leftrightarrow q_i = \frac{98 - q_j}{2} \\ \text{CS2 : } \frac{d^2\pi_i(q_i)}{dq_i^2} &= -2 < 0 \\ \Rightarrow MR_i(q_j) &= \frac{98 - q_j}{2} \Rightarrow q_i^{Co} = \frac{98}{3} \Rightarrow \pi_i^{Co} = \left(\frac{98}{3}\right)^2, i = 1, 2 \end{aligned}$$

2) Le programme du cartel est :

$$\begin{aligned} \text{Max}_Q \pi(Q) &= (100 - (Q) - 2) Q \\ \text{CN1 : } \frac{d\pi(Q)}{dQ} &= 98 - 2Q = 0 \Leftrightarrow Q = 49 \\ \text{CS2 : } \frac{d^2\pi(Q)}{dQ^2} &= -2 < 0 \\ \Rightarrow q_i^{Ca} &= \frac{98}{4} \end{aligned}$$

et

$$\pi^{Ca} = 49^2 = 2401 \Rightarrow \pi_i^{Ca} = \frac{98^2}{8}, i = 1, 2$$

3) Si la firme  $j$  produit  $q_j^{Ca} = \frac{98}{4}$ , le programme de la firme  $i$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{Max}_{q_i} \pi_i(q_i, q_j^{Ca}) &= (100 - (q_i + q_j^{Ca}) - 2) q_i \\ \text{CN1 : } \frac{d\pi_i(q_i, q_j^{Ca})}{dq_i} &= 98 - 2q_i - q_j^{Ca} = 0 \Leftrightarrow q_i = \frac{98 - q_j^{Ca}}{2} \\ \text{CS2 : } \frac{d^2\pi_i(q_i, q_j^{Ca})}{dq_i^2} &= -2 < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q_i(q_j^{Ca}) = \frac{98 - \frac{98}{4}}{2} \Rightarrow q_i^D = \frac{3 \cdot 98}{2 \cdot 4} \Rightarrow \pi_i^D = \left(\frac{3 \cdot 98}{2 \cdot 4}\right)^2$$

Si la firme  $j$  produit  $q_j^{Ca} = \frac{98}{4}$ , la firme  $i$  gagne à dévier. L'équilibre de Nash de ce jeu statique est la non-coopération. En temps fini, le jeu répété a un seul EPSJ. On répète dix fois l'équilibre de Cournot. Preuve par rétroduction.

Si  $i$  ne dévie pas, il gagne  $\pi_i^{Ca}$ , s'il dévie à la date  $T$ , à cette date il gagne  $\pi_i^D$  et puis  $\pi_i^{Co}$  indéfiniment.  $i$  ne dévie pas en  $T$  si :

$$\begin{aligned} \sum_{t=T}^{\infty} \delta^t \pi_i^{Ca} &> \delta^T \pi_i^D + \sum_{t=T+1}^{\infty} \delta^t \pi_i^{Co} \\ \Leftrightarrow \sum_{t=T+1}^{\infty} \delta^t (\pi_i^{Ca} - \pi_i^{Co}) &> \delta^T (\pi_i^D - \pi_i^{Ca}) \\ \Leftrightarrow (\pi_i^{Ca} - \pi_i^{Co}) \sum_{t=T+1}^{\infty} \delta^t &> \delta^T (\pi_i^D - \pi_i^{Ca}) \\ \Leftrightarrow (\pi_i^{Ca} - \pi_i^{Co}) \frac{\delta^{T+1}}{1-\delta} &> \delta^T (\pi_i^D - \pi_i^{Ca}) \\ \Leftrightarrow \frac{\delta}{1-\delta} > \frac{\pi_i^D - \pi_i^{Ca}}{\pi_i^{Ca} - \pi_i^{Co}} &\Leftrightarrow \delta > 0.529 \end{aligned}$$

Si  $i$  ne dévie pas, il gagne  $\pi_i^{Ca}$ , s'il dévie à la date  $T$ , à cette date il gagne  $\pi_i^D$  et puis  $\pi_i^P$  à la date suivante, puis  $\pi_i^{Ca}$  indéfiniment. Calculons  $\pi_i^P$ , en reprenant la question 3 on a :

$$\pi_i^P = \left(98 - \left(\frac{3 \cdot 98}{2 \cdot 4} + \frac{98}{4}\right) \left(\frac{98}{4}\right)\right) = \frac{3}{4} \pi_i^{Ca}.$$

Donc  $i$  ne dévie pas en  $T$  si :

$$\begin{aligned} \pi_i^{Ca} (\delta^T + \delta^{T+1}) &> \delta^T \pi_i^D + \delta^{T+1} \pi_i^P \\ \Leftrightarrow \pi_i^{Ca} (1 + \delta) &> \pi_i^D + \delta \pi_i^P \\ \Leftrightarrow \delta > \frac{\pi_i^D - \pi_i^{Ca}}{\pi_i^{Ca} - \pi_i^P} &\Leftrightarrow \delta > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### Exercice 8 : Bertrand

Deux entreprises produisent un bien homogène. La demande sur ce marché est donnée par  $D(p) = A - p$  et la fonction de coût de l'entreprise  $i$  est donnée par  $C_i(q_i) = cq_i$ ,  $i = 1, 2$  et  $c < A$ . Si les prix des deux concurrents sont égaux chacun sert la moitié du marché, sinon c'est celui qui propose le plus petit prix qui sert le marché.

1 – Déterminez l'équilibre de Nash.

2 – Déterminez l'équilibre si un cartel égalitaire était formé. Le cartel est-il stable ?

Posons  $\delta > 0$  le facteur d'actualisation pour les deux entreprises non-coopératives.

3 – Déterminez l'équilibre si on répète le jeu dix fois.

4 – Si l'on répète le jeu infiniment et si une entreprise dévie l'autre jouera, de manière crédible, non-coopératif indéfiniment. Sous quelles conditions l'équilibre de cartel pourra être un EPSJ de ce jeu ?

**Solution :**

- 1) L'équilibre de Bertrand est  $p = c$ , chaque entreprise produit  $q_i^B = \frac{A-c}{2}$  et donc  $\pi_i^B = 0$ .  
 2) Le programme du cartel est en fait le programme du monopole :

$$\text{Max}_p \pi = (p - c)(A - p)$$

$$\text{CN1 : } \frac{d\pi}{dp} = A - 2p + c = 0 \Leftrightarrow p^{Ca} = \frac{A+c}{2}$$

$$\text{CS2 : } \frac{d^2\pi(p)}{dp^2} = -2 < 0$$

Donc  $Q^{Ca} = \frac{A-c}{2}$  et  $\pi_i^{Ca} = \frac{\pi^{Ca}}{2} = \frac{(A-c)^2}{8}$ . Le cartel n'est pas stable, chaque entreprise à intérêt à dévier. Si l'entreprise  $i$  proposait le prix  $p_i(\epsilon) = p^{Ca} - \epsilon = \frac{A+c}{2} - \epsilon$  alors que l'autre entreprise propose le prix  $p^{Ca}$  son profit serait  $\pi_i(\epsilon) = 2\pi_i^{Ca} - \epsilon^2$ . Il suffit de prendre  $\epsilon < \sqrt{\pi_i^{Ca}}$  et l'entreprise  $i$  à intérêt à dévier.

- 3) Considérons la dixième étape du jeu. À cette étape chaque entreprise à intérêt à dévier, l'équilibre est donc l'équilibre de Bertrand statique. Sachant cela, à la neuvième étape, chaque entreprise à intérêt à dévier, l'équilibre est donc l'équilibre de Bertrand statique. Ainsi de suite. Les entreprises répèteront donc dix fois l'équilibre de Bertrand statique.  
 4) Soit  $T$  une date finie. Supposons que l'entreprise  $i$  dévie à la date  $T$  de l'équilibre de cartel, son gain à cette date, actualisé à la date initiale, est :  $\delta^T (\pi_i(\epsilon) - \pi_i^{Ca})$  et sa perte due aux conséquences de sa déviation en  $T$ , actualisée à la date initiale, est :  $\sum_{t=T+1}^{+\infty} \delta^t \pi_i^{Ca}$ . Le bilan est donc :

$$\delta^T \left( \pi_i(\epsilon) - \pi_i^{Ca} - \pi_i^{Ca} \sum_{t=1}^{+\infty} \delta^t \right) = \delta^T \left( \pi_i(\epsilon) - \pi_i^{Ca} \sum_{t=0}^{+\infty} \delta^t \right). \text{ L'entreprise n'a pas intérêt à « sortir » du cartel en } T \text{ si : } \pi_i(\epsilon) - \pi_i^{Ca} \sum_{t=0}^{+\infty} \delta^t \leq 0 \Leftrightarrow 2\pi_i^{Ca} - \epsilon^2 - \frac{\pi_i^{Ca}}{1-\delta} \leq 0.$$

Si on fait tendre  $\epsilon$  vers zéro alors la condition de non-déviation est équivalente à  $\delta \geq \frac{1}{2}$ . La répétition, ad vitam æternam, de l'équilibre de Cartel est un EPSJ si le facteur d'actualisation est supérieur à 0.5.

**Exercice 9 : Syndicat**

On considère un jeu de négociation salariale entre une entreprise et un syndicat. L'entreprise produit une quantité  $Y$  d'un bien. Sa fonction de production est  $Y = L$  où  $L$  est la quantité de travail utilisée. Le travail est rémunéré au taux unitaire  $w$  négocié avec le syndicat. Elle n'utilise pas d'autres facteurs de production et n'a pas de coûts fixes. Le bien est vendu au prix unitaire  $p$ . L'entreprise maximise son profit alors que le syndicat maximise la masse salariale. Le jeu se déroule ainsi : Le syndicat propose un taux de salaire  $w$  tel que  $w \in [\underline{w}, +\infty[$  où  $\underline{w}$  est le taux de salaire minimum imposé par la loi. L'entreprise a le choix entre accepter ou refuser la proposition. Si elle accepte, elle détermine une quantité de travail  $L \in [0, +\infty[$  qu'elle rémunère au taux de salaire proposé. Elle produit la quantité  $Y$  correspondante. Si elle refuse, la quantité de travail utilisée et la production sont nulles. Il n'y a pas de renégociation possible.

- 1 – Si l'entreprise accepte la proposition du syndicat :

- i) Déterminez en fonction de  $w$  la quantité optimale de travail  $L^*(w)$  choisie par l'entreprise ?  
 ii) Combien valent le profit et la masse salariale quand  $L = L^*(w)$  ?
- 2 – Quel est le taux de salaire proposé par le syndicat ?  
 3 – L'entreprise accepte-t-elle ?  
 4 – Déduire les valeurs de l'équilibre de Nash parfait en sous-jeux.

**Solution :**

1) à faire

**Exercice 10 : Super-jeu**

Soit le jeu suivant :

$J$		Joueur 2	
		$s$	$R_2$
Joueur 1	$L_1$	(3, 3)	(-1, 4)
	$R_1$	(4, -1)	(0, 0)

Tableau 1.3 : Matrice de gains : Étape 1

- 1 – Est-ce que  $(L_1, R_2)$  peut appartenir à l'ensemble des équilibres du super-jeu correspondant à la répétition ad vitam æternam du jeu de statique ci-dessus ?  
 2 – Représentez dans l'espace des gains tous les gains qui peuvent-être atteints par un équilibre de ce jeu répété si le facteur d'actualisation,  $\delta$ , est égal à un.

**Solution :**

- 1) Non, le joueur 1 en jouant  $R_1$  gagne 0 au lieu de  $-1$ . En fait cet équilibre ne respecte pas le principe de rationalité individuelle (Cf. Théorème de Friedman.)  
 2) Comme  $\delta = 1$  on peut ne s'intéresser qu'au gain moyen. Il suffit donc, pour trouver l'ensemble des gains moyens pouvant être atteints dans les EPSJ du jeu répété, de dessiner à l'aide de la matrice des gains, l'ensemble des gains moyens qui sont rationnels individuellement.

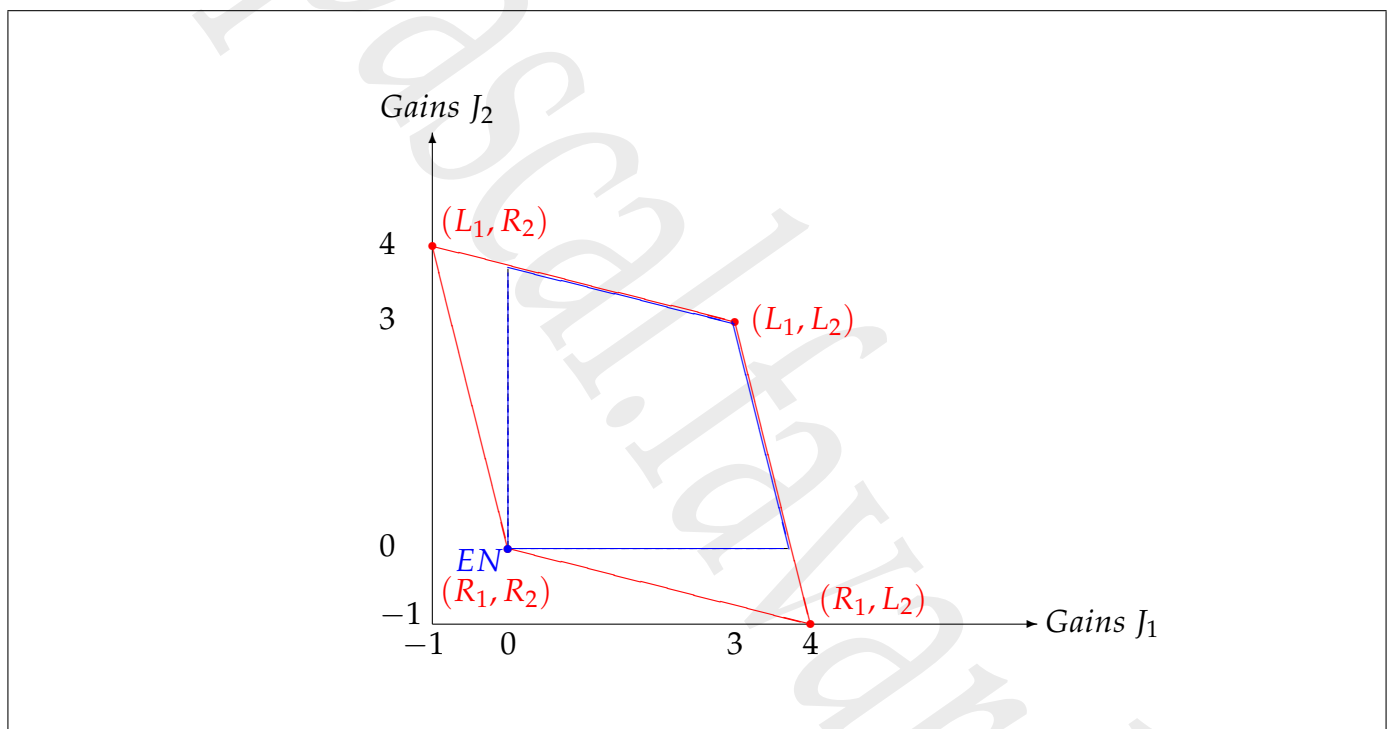


Figure 1.7 : Espace des gains



# Chapitre 2

## Jeux en information incomplète

### Sommaire

---

Enchères oui mais pas trop...	24
T'avais qu'à faire une étude de marché!	25
Comment tu m'aimes?	26
Seconde déprime	27
Travaille à l'école...	29
T'es pas mieux que moi en moyenne!	32
Differentiated duopoly with uncertain demand	34
Forclosure	39

---

**Exercice 11 : Enchères oui mais pas trop...**

Soit un terrain constructible détenu par la mairie de Mufflin. Monsieur le maire décide de vendre ce terrain en organisant une procédure d'enchères au premier prix sous plis cachetés. L'enchérisseur  $i$  ( $i = 1, 2$ ) a une valeur de réserve pour le bien vendu de  $v_i$ . Ces deux valeurs sont des variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) sur  $[0, 1]$ . Les enchères,  $p_1$  et  $p_2$ , ne peuvent pas être négatives et sont supposées proportionnelles aux valeurs de réserves. Celui qui propose l'enchère la plus élevée devient propriétaire du terrain et paye le montant de l'enchère qu'il a faite, l'autre ne paye rien. Si les deux font la même proposition, le propriétaire et donc le payeur est déterminé à pile ou face.

1 – Écrire le jeu sous forme normale.

2 – Quel est l'équilibre de Nash bayésien de ce jeu ?

**Solution :**

1) La forme normale est :

i. Une stratégie du joueur  $i$  est  $s_i = p_i \in S_i = [0, +\infty]$

ii.  $v_i$  est une information privée avec  $\theta_i = v_i \in \Theta_i = [0, 1]$

$$iii. u_i(p_1, p_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - p_i & \text{si } p_i > p_j \\ \frac{v_i - p_i}{2} & \text{si } p_i = p_j \\ 0 & \text{si } p_i < p_j \end{cases}$$

iv.  $a$  priori suivent une loi uniforme ayant pour fonction de répartition :

$$F(v_i \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x - 0}{1 - 0} = x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Pour déterminer l'équilibre de Nash bayésien on doit résoudre :

$$\text{Max}_{\{p_i\}} (v_i - p_i) \mathbf{P}[p_i > p_j^*] + \frac{1}{2} (v_i - p_i) \mathbf{P}[p_i = p_j^*]$$

Puisque les enchères sont proportionnelles,  $\alpha \neq 0$ , aux valeurs de réserves, on peut réécrire le programme précédent comme suit :

$$\text{Max}_{\{p_i\}} (v_i - p_i) \mathbf{P}[p_i > \alpha_j^* v_j] + \frac{1}{2} (v_i - p_i) \mathbf{P}[p_i = \alpha_j^* v_j]$$

$$\text{Max}_{\{p_i\}} (v_i - p_i) \mathbf{P}\left[v_j < \frac{p_i}{\alpha_j^*}\right] + \frac{1}{2} (v_i - p_i) \mathbf{P}\left[v_j = \frac{p_i}{\alpha_j^*}\right]$$

Comme  $v_j$  suit une loi uniforme on a :

$$\text{Max}_{\{p_i\}} (v_i - p_i) \mathbf{P}\left[v_j < \frac{p_i}{\alpha_j^*}\right] = (v_i - p_i) \frac{p_i}{\alpha_j^*}$$

$$\text{CN1 : } -\frac{p_i}{\alpha_j^*} + \frac{(v_i - p_i)}{\alpha_j^*} = 0 \Rightarrow p_i = \frac{v_i}{2}$$

$$\text{CS2 : } -2 \leq 0 \text{ vraie.}$$

Chacun des enchérisseurs propose donc une enchère égale à la moitié de sa valeur de réserve. Attention cela ne veut pas dire qu'ils font forcément des enchères identiques.

**Exercice 12 : T'avais qu'à faire une étude de marché!**

Soit un marché duopolistique où les entreprises choisissent les quantités à produire d'un bien homogène, le « marqueting ». La fonction inverse de demande de marqueting sur ce marché est  $\mathcal{D}^{-1}(Q) = \max\{a - Q, 0\}$  où  $Q$  est la production agrégée de marqueting mise sur le marché,  $a = \bar{a}$  avec une probabilité  $\theta \in ]0, 1[$ ,  $a = \underline{a}$  avec une probabilité  $1 - \theta$  et  $\bar{a} > \underline{a} > c > 0$ . La fonction de coût de l'entreprise  $i$ , ( $i = 1, 2$ ), est :  $C_i(q_i) = cq_i$ , avec  $2c + \bar{a} > 3\underline{a}$ . À l'exception de la valeur de  $a$  que l'entreprise 2 ne connaît pas avant de jouer, toutes les informations nécessaires sont connues par les deux entreprises. Les deux entreprises doivent décider concomitamment quelle quantité de marqueting elles vont mettre sur le marché.

- 1 – Quel est le nom de ce type de modèle ?
- 2 – Écrire le jeu sous forme normale.
- 3 – Quel est l'équilibre de Nash bayésien de ce jeu ?
- 4 – Déterminez l'équilibre de marché  $(Q^{Duo}, p^{Duo})$ .
- 5 – Calculez les profits des deux entreprises à l'équilibre  $(Q^{Duo}, p^{Duo})$ .
- 6 – Quelle est la valeur de l'information privée pour l'entreprise 1 ?

**Solution :**

1) Modèle de Cournot.

2) Forme normale :

i. Deux joueurs :  $En_1$  et  $En_2$

ii. Information « privée » :  $\Theta_2 = \emptyset$  et  $\Theta_1 = \{\underline{a}, \bar{a}\}$

iii.  $s_i = q_i \in [0, +\infty[$

iv. Gains :  $\pi_i(q_i, q_j, a)$

3) L'objectif de  $En_1$  est la maximisation du profit :

$$\mathcal{P}_{En_1} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{q_1\} \end{array} \right. \pi_1(q_1, q_2, a) = q_1[a - (q_1 + q_2) - c] \quad (2.1)$$

$$\text{CN1 : } [a - (q_1 + q_2) - c] - q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = \max \left\{ 0, \frac{a - q_2 - c}{2} \right\}$$

$$\text{CS2 : } -2 \leq 0 \text{ vraie}$$

$$\Rightarrow MR_1(q_2, \bar{a}) = \frac{\bar{a} - q_2 - c}{2} > MR_1(q_2, \underline{a}) = \frac{\underline{a} - q_2 - c}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(q_1) = \frac{\mathbb{E}(a) - q_2 - c}{2}$$

L'objectif de  $En_2$  est la maximisation de son espérance de profit :

$$\mathcal{P}_{En_2} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{q_2\} \end{array} \right. \mathbb{E}(\pi_2(q_2, q_1, a)) = q_2[\mathbb{E}(a) - (q_2 + \mathbb{E}(q_1)) - c] \quad (2.2)$$

$$\text{CN1 : } [\mathbb{E}(a) - (q_2 + \mathbb{E}(q_1)) - c] - q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = \frac{\mathbb{E}(a) - \mathbb{E}(q_1) - c}{2}$$

$$\text{CS2 : } -2 \leq 0 \text{ vraie}$$

$$\Rightarrow q_2^* = \frac{\mathbb{E}(a) - c}{3}$$

$$\text{Donc } q_1^*(\underline{a}) = \max \left\{ \frac{3\underline{a} - \mathbb{E}(a) - 2c}{6}, 0 \right\} \text{ et } q_1^*(\bar{a}) = \frac{3\bar{a} - \mathbb{E}(a) - 2c}{6} > 0.$$

i. Si  $\theta < \frac{2(\underline{a} - c)}{\bar{a} - \underline{a}}$  alors  $\frac{3\underline{a} - \mathbb{E}(a) - 2c}{6} > 0$ , l'équilibre de Nash bayésien ( $\mathcal{ENB}$ ) est, suivant le niveau de  $a$  :

$$\mathcal{ENB}|_{a=\underline{a}} = \left\{ \frac{3\underline{a} - \mathbb{E}(a) - 2c}{6}, \frac{\mathbb{E}(a) - c}{3} \right\} \text{ ou } \mathcal{ENB}|_{a=\bar{a}} = \left\{ \frac{3\bar{a} - \mathbb{E}(a) - 2c}{6}, \frac{\mathbb{E}(a) - c}{3} \right\}.$$

ii. Si  $\theta \geq \frac{2(\underline{a} - c)}{\bar{a} - \underline{a}}$  alors  $\frac{3\underline{a} - \mathbb{E}(a) - 2c}{6} \leq 0$ , l'équilibre de Nash bayésien ( $\mathcal{ENB}$ ) est, suivant le niveau de  $a$  :

$$\mathcal{ENB}|_{a=\underline{a}} = \left\{ 0, \frac{\mathbb{E}(a) - c}{3} \right\} \text{ ou } \mathcal{ENB}|_{a=\bar{a}} = \left\{ \frac{3\bar{a} - \mathbb{E}(a) - 2c}{6}, \frac{\mathbb{E}(a) - c}{3} \right\}.$$

Notons que  $\frac{2(\underline{a} - c)}{\bar{a} - \underline{a}} \in ]0, 1[$  puisque  $2c + \bar{a} > 3\underline{a}$  et  $c < \underline{a}$ .

4) L'équilibre sur ce marché est :

$$(Q^{Duo}, p^{Duo}) = \begin{cases} \left( \frac{3\underline{a} + \mathbb{E}(a) - 4c}{6}, \frac{3\underline{a} - \mathbb{E}(a) + 4c}{6} \right), & \text{si } a = \underline{a} \text{ et } \theta < \frac{2(\underline{a} - c)}{\bar{a} - \underline{a}} \quad (2.3) \\ \left( \frac{\mathbb{E}(a) - c}{3}, \frac{3\underline{a} - \mathbb{E}(a) + c}{3} \right), & \text{si } a = \underline{a} \text{ et } \theta \geq \frac{2(\underline{a} - c)}{\bar{a} - \underline{a}} \quad (2.4) \\ \left( \frac{3\bar{a} + \mathbb{E}(a) - 4c}{6}, \frac{3\bar{a} - \mathbb{E}(a) + 4c}{6} \right), & \text{si } a = \bar{a} \quad (2.5) \end{cases}$$

5) En utilisant le profit défini en (2.1) on a :  $\begin{cases} \pi_1^{(2.3)} = \left( \frac{3\underline{a} - 2c - \mathbb{E}(a)}{6} \right)^2 \\ \pi_1^{(2.4)} = 0 \\ \pi_1^{(2.5)} = \left( \frac{3\bar{a} - 2c - \mathbb{E}(a)}{6} \right)^2 \end{cases}$  et le profit défini en (2.2)

$$\text{on a : } \begin{cases} \pi_2^{(2.3)} = \frac{(3\underline{a} - \mathbb{E}(a) - 2c)(\mathbb{E}(a) - c)}{18} \\ \pi_2^{(2.4)} = \frac{(3\underline{a} - \mathbb{E}(a) - 2c)(\mathbb{E}(a) - c)}{9} \\ \pi_2^{(2.5)} = \frac{(3\bar{a} - \mathbb{E}(a) - 2c)(\mathbb{E}(a) - c)}{18} \end{cases}.$$

6) Si l'entreprise 1 n'a pas d'information privée, les deux entreprises sont alors parfaitement informées.

Dans ce cas, on a :  $\pi_1 = \pi_2 = \left( \frac{a - c}{3} \right)^2$ . En faisant la différence des profits suivant les valeurs de  $a$

$$\text{et de } \theta, \text{ on obtient la valeur de l'information } Vi_1 \text{ pour l'entreprise 1 : } \begin{cases} Vi_1^{(2.3)} = \underline{a} - \mathbb{E}(a) < 0 \\ Vi_1^{(2.4)} = - \left( \frac{a - c}{3} \right)^2 < 0 \\ Vi_1^{(2.5)} = \bar{a} - \mathbb{E}(a) > 0. \end{cases}$$

Si  $Vi_1$  est négative (i.e.  $a = \underline{a}$ ), l'entreprise 1 est pénalisée par le fait de détenir une information privée et si  $a = \bar{a}$  alors l'entreprise 1 doit au moins percevoir  $\bar{a} - \mathbb{E}(a)$  et elle retire un bénéfice de son information privée.

**Exercice 13 : Comment tu m'aimes ?** Deux entreprises produisent,  $q$ , des biens différenciés et choisissent le prix,  $p$ , du bien qu'elle mette sur le marché. La fonction demande pour l'entreprise  $i$ , avec  $i = 1, 2$  et  $j \neq i$ , est  $q_i(p_i, p_j) = \max\{a - p_i + b_i p_j, 0\}$ ,  $b_i = \bar{b}$  avec une probabilité  $\mu$ ,  $b_i = \underline{b}$  avec une probabilité  $1 - \mu$ ,  $\bar{b} > \underline{b} > 0$  et la réalisation de  $b_i$  est indépendante de celle de  $b_j$ . Les coûts de production de l'entreprise  $i$ ,  $i = 1, 2$  sont nuls. À l'exception de la valeur de  $b$  dans la demande de l'autre entreprise, toutes les informations nécessaires sont connues par les deux entreprises. Les deux entreprises doivent décider concomitamment du prix du bien qu'elle vont mettre sur le marché.

- 1 – Quel est le nom de ce type de modèle ?
- 2 – Aux yeux des consommateurs comment sont les deux biens produits ?
- 3 – Écrire le jeu sous forme normale.
- 4 – Quel est l'équilibre de Nash bayésien de ce jeu ?

### Solution :

- 1) Modèle de Bertrand
- 2) Substituts puisque  $b_i > 0$ .
- 3) Forme normale :
  - i. Deux joueurs :  $En_1$  et  $En_2$
  - ii. Information « privée » :  $\Theta_1 = \{\underline{b}, \bar{b}\}$  et  $\Theta_2 = \{\underline{b}, \bar{b}\}$
  - iii.  $s_i = p_i \in [0, +\infty[$
  - iv. Gains :  $\pi_i(p_i, p_j)$
- 4) L'objectif de  $En_i$  est la maximisation de son espérance de profit :

$$\mathcal{P}_{En_i} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{p_i\} \end{array} \right. \mathbb{E}(\pi_i(p_i, p_j)) = p_i[a - p_i + b_i \mathbb{E}(p_j)] \quad (2.1)$$

$$\text{CN1 : } [a - p_i + b_i \mathbb{E}(p_j)] - p_i = 0 \Rightarrow p_i = \frac{a + b_i \mathbb{E}(p_j)}{2}$$

$$\text{CS2 : } -2 \leq 0 \text{ vraie}$$

$$\Rightarrow MR_i(p_j, \bar{b}) = \frac{a + \bar{b} \mathbb{E}(p_j)}{2} > MR_i(p_j, \underline{b}) = \frac{a + \underline{b} \mathbb{E}(p_j)}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(p_i) = \frac{a + \mathbb{E}(b) \mathbb{E}(p_j)}{2}$$

On a donc :  $\mathbb{E}(p_i) = \mathbb{E}(p_j) = \frac{a}{2 - \mathbb{E}(b)}$  si  $2 > \mathbb{E}(b)$ , sinon l'équilibre n'existe pas. L'équilibre de Nash bayésien ( $\mathcal{ENB}$ ) si  $2 > \mathbb{E}(b)$ , est :

$$\mathcal{ENB} = \left\{ \left( \frac{a(2 - \mathbb{E}(b) + \bar{b})}{2(2 - \mathbb{E}(b))}, \frac{a(2 - \mathbb{E}(b) + \underline{b})}{2(2 - \mathbb{E}(b))} \right); \left( \frac{a(2 - \mathbb{E}(b) + \bar{b})}{2(2 - \mathbb{E}(b))}, \frac{a(2 - \mathbb{E}(b) + \underline{b})}{2(2 - \mathbb{E}(b))} \right) \right\}.$$

**Exercice 14 : Seconde déprime** Soit  $\Gamma$ , le jeu à deux joueurs  $J_1$  qui peut être de type  $T_1$  ou  $T_2$ ,  $J_2$  ne connaît pas le type de  $J_1$ , il sait seulement que  $\mathbf{p}(T_1) = \mathbf{p}(T_2)$ .  $J_1$  joue  $L'$  ou  $R'$ , ces actions sont observées par  $J_2$ .  $J_2$  joue  $L''$  ou  $R''$ . Les gains des deux joueurs suivant le type de  $J_1$  sont :

$T_1$	$J_2$		
	$a$	$L''$	$R''$
$J_1$	$L'$	(2,2)	(1,2)
	$R'$	(2,1)	(0,0)

et

$T_2$	$J_2$		
	$a$	$L''$	$R''$
$J_1$	$L'$	(7,7)	(6,12)
	$R'$	(12,6)	(10,10)

- 1 – Caractérissez ce jeu.
- 2 – Combien d'étapes y a-t-il dans ce jeu ?
- 3 – Dessinez l'arbre de jeu.
- 4 – Y a-t-il des équilibres séparateurs ?
- 5 – Y a-t-il des équilibres mélangeants ?
- 6 – Y a-t-il des équilibres semi-séparateurs ?

**Solution :**

- 1) Jeu dynamique en information incomplète.
- 2) Deux étapes plus une étape rajoutée par le modélisateur.
- 3) L'arbre de jeu représentant  $\Gamma$  :

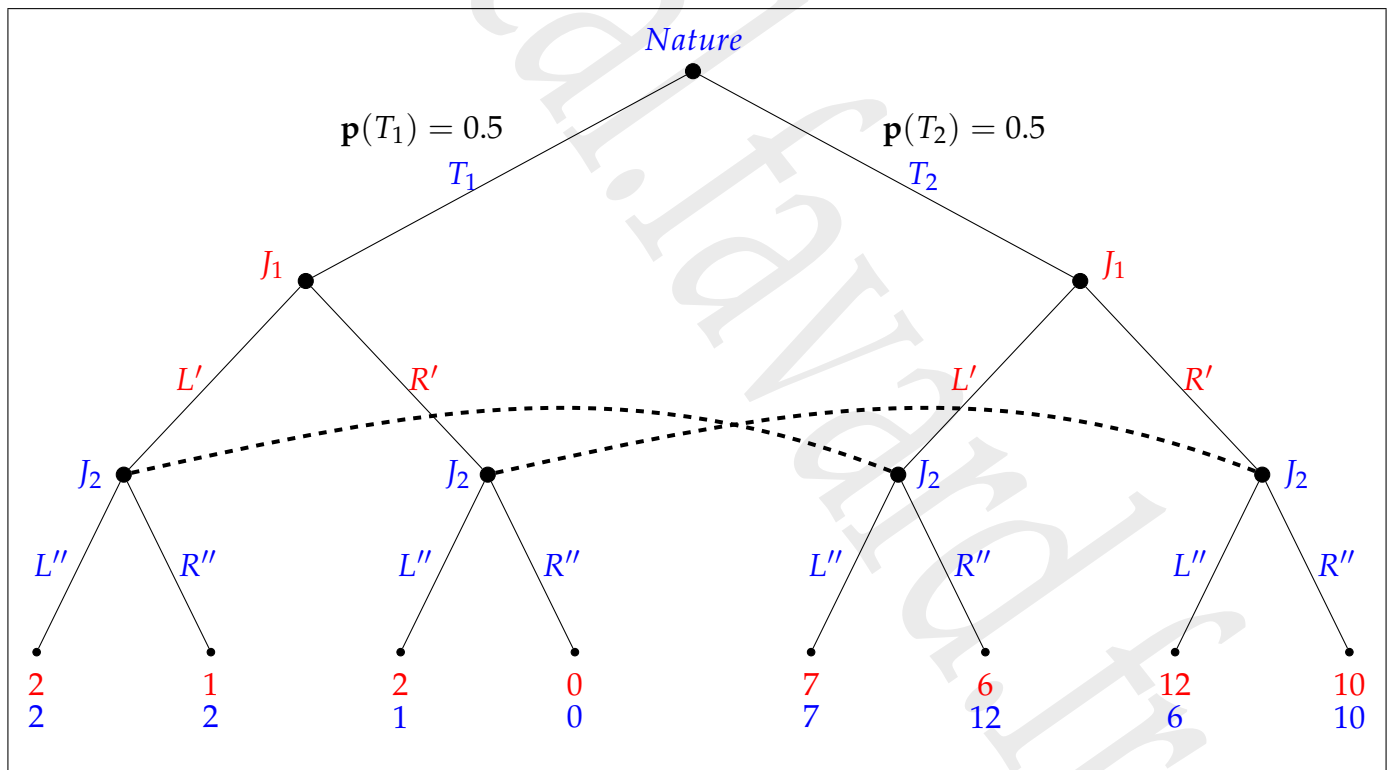


Figure 2.1 : Arbre de Jeu

- 4) Remarque :  $R'$  est une stratégie dominante si  $J_1$  de type  $T_2$  puisque  $12 > 7$  et  $10 > 6$ . Donc si un équilibre séparateur existe, il sera de la forme : les *a priori* de  $J_2$  sont  $J_1$  joue  $L'$  s'il est de type  $T_1$  et  $R'$  s'il est de type  $T_2$ . Notons une fois pour toutes  $\alpha$  la probabilité que  $J_2$  joue  $L''$  et donc  $1 - \alpha$  celle qu'il joue  $R''$ .

Joueur 2 :  $\mathbb{E}(\text{gain}_{J_2}|L') = 2\alpha + 2(1 - \alpha) = 2 \Rightarrow \alpha \in [0, 1] \Rightarrow J_2$  joue en stratégie mixte s'il observe  $L'$   
 $\mathbb{E}(\text{gain}_{J_2}|R') = 6\alpha + 10(1 - \alpha) = -4\alpha + 10 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow J_2$  joue  $R''$  s'il observe  $R'$

Joueur 1 :  $\mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_1} | L') = 2\alpha + 1(1 - \alpha) = \alpha + 1 > \mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_1} | R') = 0$  puisque  $J_2$  joue  $R''$

$\mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_2} | R') = 10$  puisque  $J_2$  joue  $R'' > \mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_2} | L') = 7\alpha + 6(1 - \alpha) = \alpha + 6$  Donc le joueur n'a pas intérêt à dévier de l'équilibre. Il existe une infinité d'équilibres séparateurs de type :

$$EBP_{\text{séparateurs}} = [(L' | T_1, R' | T_2); ((\alpha, 1 - \alpha) | L', R'' | R')] \text{ avec } \alpha \in [0, 1]$$

5) Comme  $R'$  est une stratégie dominante pour  $J_1$  de type  $T_2$ , si un équilibre mélangeant existe il sera tel que  $J_1$  joue  $R'$  quelque soit son type. On est donc dans le cadre où  $0 < \mathbf{p}_2(T_1 | R') = 1 - \mathbf{p}_2(T_2 | R') < 1$  et  $\mathbf{p}_2(T_1 | L') = 1 - \mathbf{p}_2(T_2 | L')$ . Comme *a priori* de  $J_2$  est que  $J_1$  joue  $R'$  quelque soit son type on peut calculer<sup>1</sup> de façon rationnelle  $\mathbf{p}_2(T_1 | R')$  et  $\mathbf{p}_2(T_2 | R')$  qui sont respectivement  $\mathbf{p}(T_1)$  et  $\mathbf{p}(T_2)$ ; le joueur  $J_2$  « n'apprend rien » en observant l'action de  $J_1$ . En revanche on ne peut pas calculer  $\mathbf{p}_2(T_1 | L')$  et  $\mathbf{p}_2(T_2 | L')$  sur des bases rationnelles. Mais si on pose  $\mathbf{p}_2(T_1 | L') < 1$  et donc  $\mathbf{p}_2(T_2 | L') > 0$ , cette croyance « hors équilibre » est contradictoire avec le fait que  $R'$  soit une stratégie dominante pour  $J_1$  de type  $T_2$ . Le seul *a posteriori* cohérent « hors équilibre » est  $\mathbf{p}_2(T_1 | L') = 1$  et donc  $\mathbf{p}_2(T_2 | L') = 0$ .

Joueur 2 :  $\mathbb{E}(\text{gain}_{J_2} | R') = \mathbf{p}_2(T_1) [\alpha] + (1 - \mathbf{p}_2(T_1)) [-4\alpha + 10] = \alpha (5\mathbf{p}_2(T_1) - 4) + 10(1 - \mathbf{p}_2(T_1))$ . Comme ici  $\mathbf{p}_2(T_1) = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 0$  et donc  $J_2$  choisit l'action  $R''$ .

$\mathbb{E}(\text{gain}_{J_2} | L') = \mathbf{p}_2(T_1 | L') [2] + (1 - \mathbf{p}_2(T_1 | L')) [12 - 5\alpha] = 5\alpha(\mathbf{p}_2(T_1 | L') - 1) + 12 - 10\mathbf{p}_2(T_1 | L')$ . Or  $\mathbf{p}_2(T_1 | L') = 1$  donc  $J_2$  joue en stratégie mixte hors équilibre.

Joueur 1 :  $\mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_1} | L') = \alpha[2] + (1 - \alpha)[1] = 1 + \alpha > 0$

$\mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_1} | R') = 0$  puisque lorsque  $J_2$  observe  $R'$  il joue  $R''$ .

Donc le joueur 1 a intérêt à dévier s'il est de type  $T_1$ . Il n'y a pas d'équilibre mélangeant.

6) Comme  $R'$  est une stratégie dominante si  $J_1$  de type  $T_2$ , si un équilibre semi-séparateur existe il sera tel que  $J_1$  joue  $R'$  s'il est de type  $T_2$  et s'il est de type  $T_1$ , il jouera en stratégie mixte avec  $\theta \in ]0, 1[$  la probabilité qu'il joue  $L'$ . On a donc :  $\mathbf{p}_2(T_1 | R') = \frac{(1-\theta)\mathbf{p}(T_1)}{(1-\theta)\mathbf{p}(T_1)+1 \times \mathbf{p}(T_2)} = \frac{1-\theta}{2-\theta}$  et  $\mathbf{p}_2(T_2 | R') = \frac{1}{2-\theta} = 1 - \mathbf{p}_2(T_1 | R')$ .

Joueur 2 :  $\mathbb{E}(\text{gain}_{J_2} | R') = \frac{1-\theta}{2-\theta} [\alpha] + \frac{1}{2-\theta} [6\alpha + 10(1 - \alpha)] = \frac{-\alpha(3 + \theta) + 10}{2 - \theta} \Rightarrow J_2$  joue  $R''$   
 $\mathbb{E}(\text{gain}_{J_2} | L') = 2$

Joueur 1 :  $\mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_2} | L') < \mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_2} | R')$  (stratégie dominante)

$\mathbb{E}(\text{gain}_{J_1, T_1}) = \theta[2\alpha + 1 - \alpha] + (1 - \theta)[0] = \theta(\alpha + 1) \Rightarrow J_1$  joue toujours  $L'$

Le joueur 1 n'a pas intérêt à jouer en stratégie mixte s'il est de type  $T_1$  conditionnellement aux « croyances » de  $J_2$ , il n'y a donc pas d'équilibre semi-séparateur.

### Exercice 15 : Travaille à l'école...

Considérons le métier d'économiste d'entreprise et une population souhaitant occuper ce type de poste. Supposons, pour simplifier, que cette population soit seulement composée d'individus, de type  $\underline{\theta}$ , « peu productifs » et d'individus, de type  $\bar{\theta}$ ,

1. En utilisant la règle de Bayes, on obtient :  $\mathbf{p}_2(T_1 | R') = \frac{\mathbf{p}_2(R' | T_1)\mathbf{p}(T_1)}{\mathbf{p}_2(R' | T_1)\mathbf{p}(T_1) + \mathbf{p}_2(R' | T_2)\mathbf{p}(T_2)} = \mathbf{p}(T_1)$  puisque  $\mathbf{p}_2(R' | T_1) = \mathbf{p}_2(R' | T_2) = 1$  et  $\mathbf{p}(T_1) + \mathbf{p}(T_2) = 1$ .



« très productifs ». Chaque individu choisit son niveau d'éducation, noté  $e$  avec  $e \in [0, \bar{e}]$ , qu'il va atteindre avant d'entrer sur le marché du travail où les offres d'emploi sont très largement supérieures aux demandes. Le salaire d'un individu occupant un poste d'économiste d'entreprise est  $w$ , son utilité est  $w - \frac{e^2}{\theta}$ , avec  $\theta = \{\underline{\theta}, \bar{\theta}\}$ , s'il travaille sinon elle est nulle. Chaque économiste rapporte à son entreprise un profit  $\theta e - w$  et sans embaucher l'entreprise a un profit nul.

1 – En information complète déterminez  $e$  et  $w$

En information incomplète,  $\theta$  n'est pas observé par les employeurs.

2 – Déterminez les équilibres séparateurs.

3 – Y a-t-il un équilibre séparateur Pareto dominant ? Si oui, lequel ?

4 – Appliquez le critère intuitif de Cho-Kreps.

### Solution :

1) Sur ce marché du travail, les candidats étant peu nombreux, il y a une concurrence (à la Bertrand) entre les employeurs et donc  $w(\theta, e) = \theta e$ . Un candidat à ce type d'emploi choisit le niveau d'éducation qui maximise son utilité sachant que  $w(\theta, e) = \theta e$ , donc  $e^*(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$  et  $w^* = \frac{\theta^3}{2}$

2) Notons  $v(e)$  la probabilité qu'un candidat ayant atteint un niveau d'éducation  $e$  soit de type  $\underline{\theta}$  aux yeux d'un employeur. Un équilibre séparateur  $e(\underline{\theta}) \neq e(\bar{\theta})$ , s'il existe, sera soutenu par  $v(e(\underline{\theta})) = 1$  et  $v(e(\bar{\theta})) = 0$ . On supposera que  $\forall e \neq \{e(\underline{\theta}), e(\bar{\theta})\}$ ,  $v(e) = 1$  : tout niveau d'éducation différent de deux niveaux d'équilibre conduira l'employeur à considérer que l'individu est de type  $\underline{\theta}$ . Dans ce cadre, un employeur proposera  $\underline{\theta}e(\underline{\theta})$  (resp.  $\bar{\theta}e(\bar{\theta})$ ) comme salaire à un candidat ayant atteint un niveau d'éducation  $e(\underline{\theta})$  (resp.  $e(\bar{\theta})$ ).

i. Candidat de type  $\underline{\theta}$  reçoit un salaire à l'équilibre séparateur de  $\underline{\theta}e$  et son niveau d'utilité ne doit pas être plus élevé s'il choisissait le niveau d'éducation  $e(\bar{\theta})$ . Étant donné les croyances hors équilibre il doit résoudre le programme suivant :

$$\mathcal{P}_{\underline{\theta}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}_{\{e(\underline{\theta})\}} \underline{\theta}e(\underline{\theta}) - \frac{e(\underline{\theta})^2}{\underline{\theta}} \\ \text{s.t.} \underline{\theta}e(\underline{\theta}) - \frac{e(\underline{\theta})^2}{\underline{\theta}} \geq \bar{\theta}e(\bar{\theta}) - \frac{e(\bar{\theta})^2}{\underline{\theta}} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\frac{d \left[ \underline{\theta}e(\underline{\theta}) - \frac{e(\underline{\theta})^2}{\underline{\theta}} \right]}{de(\underline{\theta})} = 0 \Rightarrow e^*(\underline{\theta}) = \frac{\theta^2}{2} \text{ et en remplaçant dans l'inégalité celle-ci s'écrit : } \frac{\theta^3}{4} \geq \bar{\theta}e(\bar{\theta}) - \frac{e(\bar{\theta})^2}{\underline{\theta}} \text{ qui est une première condition sur } e(\bar{\theta}).$$

ii. Candidat de type  $\bar{\theta}$  choisira  $e(\bar{\theta})$  si  $\forall e \geq 0 : \bar{\theta}e(\bar{\theta}) - \frac{e(\bar{\theta})^2}{\bar{\theta}} \geq \underline{\theta}e - \frac{e^2}{\bar{\theta}}$ . Il faut donc chercher pour

$$\text{quelle valeur de } e, \underline{\theta}e - \frac{e^2}{\bar{\theta}} \text{ atteint sa borne supérieure. Puisque } \frac{d \left[ \underline{\theta}e - \frac{e^2}{\bar{\theta}} \right]}{de} = 0 \Rightarrow e = \frac{\theta \bar{\theta}}{2}, \text{ la}$$

$$\text{borne supérieure est : } \frac{\theta^2 \bar{\theta}}{4}.$$

iii. Le niveau d'éducation « très productifs » étant donné les croyances hors équilibre doit vérifier le système d'inéquations suivant :



$$\begin{cases} \frac{\theta^3}{4} \geq \bar{\theta}e(\bar{\theta}) - \frac{e(\bar{\theta})^2}{\bar{\theta}} \\ \bar{\theta}e(\bar{\theta}) - \frac{e(\bar{\theta})^2}{\bar{\theta}} \geq \frac{\theta^2\bar{\theta}}{4} \end{cases} \text{ donc si : } \begin{cases} e(\bar{\theta}) \notin \left[ \frac{\bar{\theta} - \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}}, \frac{\bar{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}} \right] \\ e(\bar{\theta}) \in \left[ \frac{\bar{\theta} - \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}}, \frac{\bar{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}} \right] \end{cases}$$

L'équation  $\frac{e^2}{\bar{\theta}} - \bar{\theta}e + \frac{\theta^3}{4} = 0$  admettant deux racines réelles positives,  $e_1 = \frac{\bar{\theta} - \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}}$  et  $e_2 = \frac{\bar{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}}$  et l'équation  $-\frac{e^2}{\bar{\theta}} + \bar{\theta}e - \frac{\theta^2\bar{\theta}}{4} = 0$  admettant deux racines réelles positives,  $e_3 = \frac{\bar{\theta} - \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}}$  et  $e_4 = \frac{\bar{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}}$ .

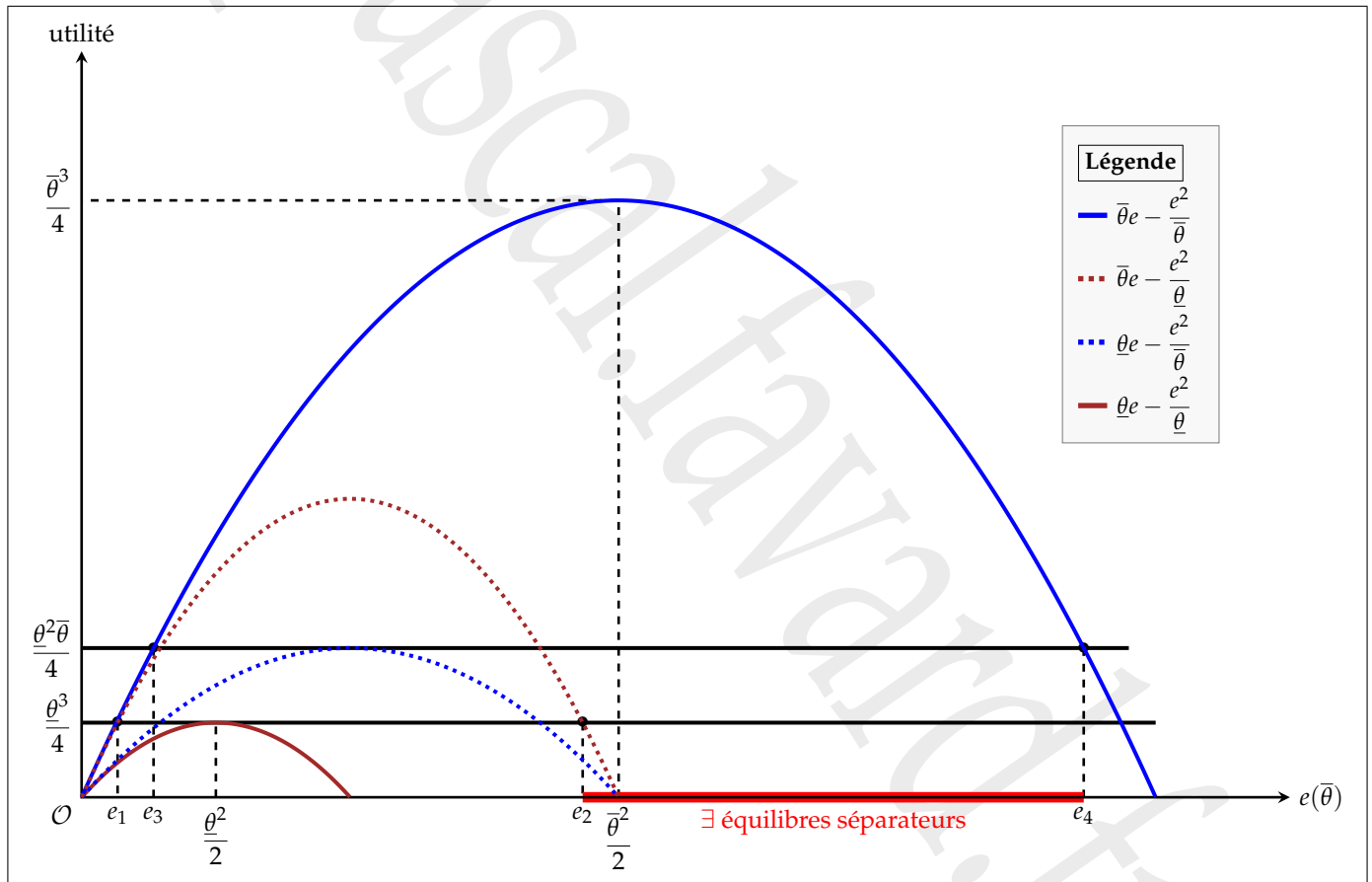


Figure 2.2 : Valeurs de  $e(\bar{\theta})$  compatibles avec un équilibre séparateur

Il existe une infinité d'équilibres séparateurs soutenus par ces croyances, ceux-ci sont de la forme :

$$e(\theta) = \frac{\theta^2}{2}, e(\bar{\theta}) \in \left[ \frac{\bar{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}}, \frac{\bar{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}} \right].$$

3) Le niveau d'effort qui maximise l'utilité d'un candidat « très productif » est :

$$e^*(\bar{\theta}) = \frac{\bar{\theta}^2}{2} \in \left[ \frac{\bar{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}}, \frac{\bar{\theta} + \sqrt{\bar{\theta}^2 - \theta^2}}{\frac{2}{\bar{\theta}}} \right].$$

Comme les candidats « peu productifs » choisissent le niveau d'éducation  $e^*(\underline{\theta})$  et quoiqu'il arrive le profit des employeurs étant nul, l'équilibre séparateur optimal au sens de Pareto est :

$$e(\underline{\theta}) = \frac{\underline{\theta}^2}{2}, e(\bar{\theta}) = \frac{\bar{\theta}^2}{2}.$$

- 4) Si l'employeur observe  $e > e_2$  mais  $e \neq e(\bar{\theta})$ , il s'agit bien d'un niveau d'éducation hors équilibre et les candidats « peu productifs » n'ont pas intérêt à choisir un tel niveau. En fait, ils auraient une utilité plus faible qu'en choisissant  $e^*(\underline{\theta})$ . Donc l'employeur est sûr qu'avec un tel niveau d'éducation, le candidat est « très productif ». Rien ne l'empêche alors de lui verser  $w = \bar{\theta}e$ . Avec cette modification des réactions de l'employeur hors équilibre, le seul équilibre séparateur sera l'optimum de Pareto. Cela implique que l'employeur devrait modifier ses croyances hors équilibre :  $\forall e > e_2, v(e) = 0$ .

**Exercice 16 : T'es pas mieux que moi en moyenne !**

Soit un bien homogène produit simultanément par seulement deux entreprises en Mayenne, la demande (inverse) agrégée pour ce bien est :  $P(q_1 + q_2) = \max\{a - (q_1 + q_2), 0\}$ . Supposons que le coût marginal de chaque firme soit constant et qu'il n'y ait pas de coût fixe. Donc, pour  $i = 1, 2$ , la fonction de coût de l'entreprise  $i$  est :  $C_i(q_i) = c_i q_i$  avec  $0 < c_i < \frac{a + c_j}{2}$  pour  $j \neq i$ .

- 1 – Déterminez le ou les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu ? Donnez les profits des entreprises à l'équilibre si  $c_1 = c_2 = 2$  et  $a = 4$ .

Si, à présent, on suppose que  $c_2 \in \{\underline{c}, \bar{c}\}$  et  $\underline{c} < c_1 < \bar{c} < \frac{2a + c_1}{3}$ . Les croyances de l'entreprise 1 sont telles que :  $\mathbb{E}(c_2) = c_1$ .

- 2 – Mettre ce jeu sous forme normale.

- 3 – Déterminez le ou les équilibres de Nash bayésien en stratégies pures de ce jeu ?

- 4 – Donnez les profits des entreprises à l'équilibre si  $(\underline{c}, c_1, \bar{c}) = (1, 2, 3)$  et  $a = 4$ . Synthétisez vos résultats sous forme d'un graphique et commentez.

**Solution :**

- 1) L'objectif de  $En_i$  est la maximisation du profit ( $i \neq j$ ) :

$$\mathcal{P}_{En_i} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{q_i\} \end{array} \right. \pi_i(q_i, q_j) = q_i[a - (q_i + q_j) - c_i] \quad (2.1)$$

$$\text{CN1} : [a - (q_i + q_j) - c_i] - q_i = 0 \Rightarrow MR_i(q_j) = \frac{a - q_j - c_i}{2}$$

$$\text{CS2} : -2 \leq 0 \text{ vraie}$$

À l'équilibre de Nash (unique)  $\hat{q}_i = \frac{a + c_j - 2c_i}{3} > 0$ , donc :

$$\mathcal{EN}_{SP} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2) = \left( \frac{a + c_2 - 2c_1}{3}, \frac{a + c_1 - 2c_2}{3} \right).$$

À l'équilibre  $\hat{q}_1 = \hat{q}_2 = \frac{2}{3}$ ,  $\hat{p} = \frac{a + c_1 + c_2}{3} = \frac{8}{3}$ , cela implique que  $\hat{\pi}_1 = \left( \frac{a + c_2 - 2c_1}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} = \hat{\pi}_2$ .

- 2) Il y a deux joueurs :  $En_1$  et  $En_2$ . Les ensembles d'information « privée » sont :  $\Theta_1 = \emptyset$  et  $\Theta_2 = \{\underline{c}, \bar{c}\}$ .  
 Une stratégie est  $s_i = q_i \in [0, +\infty[$  et les gains sont :  $\pi_i(q_i, q_j; \theta)$ .
- 3) L'objectif de  $En_2$  est la maximisation du profit :

$$\mathcal{P}_{En_2} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{q_2\} \end{array} \right. \pi_2(q_2, q_1) = q_2[a - (q_2 + q_1) - c_2] \quad (2.2)$$

Notons que le programmes (2.2) et (2.1) sont équivalents, donc :  $\Rightarrow MR_2(q_1; \underline{c}) = \frac{a - q_1 - \underline{c}}{2} >$   
 $MR_2(q_1; \bar{c}) = \frac{a - q_1 - \bar{c}}{2}$ . Ce qui implique que pour  $En_1$ ,  $\mathbb{E}(q_2) = \frac{a - q_1 - \mathbb{E}(c_2)}{2} = \frac{a - q_1 - c_1}{2}$ .  
 L'objectif de  $En_1$  est la maximisation de son profit espéré :

$$\mathcal{P}_{En_1} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{q_1\} \end{array} \right. \mathbb{E}[\pi_1(q_1, q_2)] \quad (2.3)$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{P}_{En_1} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{q_1\} \end{array} \right. q_1[a - (q_1 + \mathbb{E}(q_2)) - c_1] \quad (2.4)$$

$$\text{CN1 : } [a - (q_1 + \mathbb{E}(q_2)) - c_1] - q_1 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{a - \mathbb{E}(q_2) - c_1}{2}$$

CS2 :  $-2 \leq 0$  vraie

$$\Rightarrow MR_1(q_2) = \frac{a - \mathbb{E}(q_2) - c_1}{2}$$

$$\text{L'équilibre bayésien est solution du système : } \begin{cases} q_2(\underline{c}) = \frac{a - q_1 - \underline{c}}{2} \\ q_2(\bar{c}) = \frac{a - q_1 - \bar{c}}{2} \\ q_1 = \frac{a - \mathbb{E}(q_2) - c_1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{EB} = \{q_1^*, (q_2^*(\underline{c}), q_2^*(\bar{c}))\} = \left\{ \frac{a - c_1}{3}, \left( \frac{2a + c_1 - 3\underline{c}}{6}, \frac{2a + c_1 - 3\bar{c}}{6} \right) \right\}$$

- 4) En utilisant l'équilibre bayésien, on a :  $\{q_1^*, (q_2^*(\underline{c}), q_2^*(\bar{c}))\} = \left\{ \frac{2}{3}, \left( \frac{7}{6}, \frac{1}{6} \right) \right\}$  et  $(p^*(\underline{c}), p^*(\bar{c})) =$   
 $\left( \frac{2a + c_1 + 3\underline{c}}{6}, \frac{2a + c_1 + 3\bar{c}}{6} \right) = \left( \frac{13}{6}, \frac{19}{6} \right)$ , donc :  $(\pi_1^*(\underline{c}), \pi_1^*(\bar{c}), \pi_2^*(\underline{c}), \pi_2^*(\bar{c})) = \left( \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{7}{36}, \frac{7}{36} \right)$ .

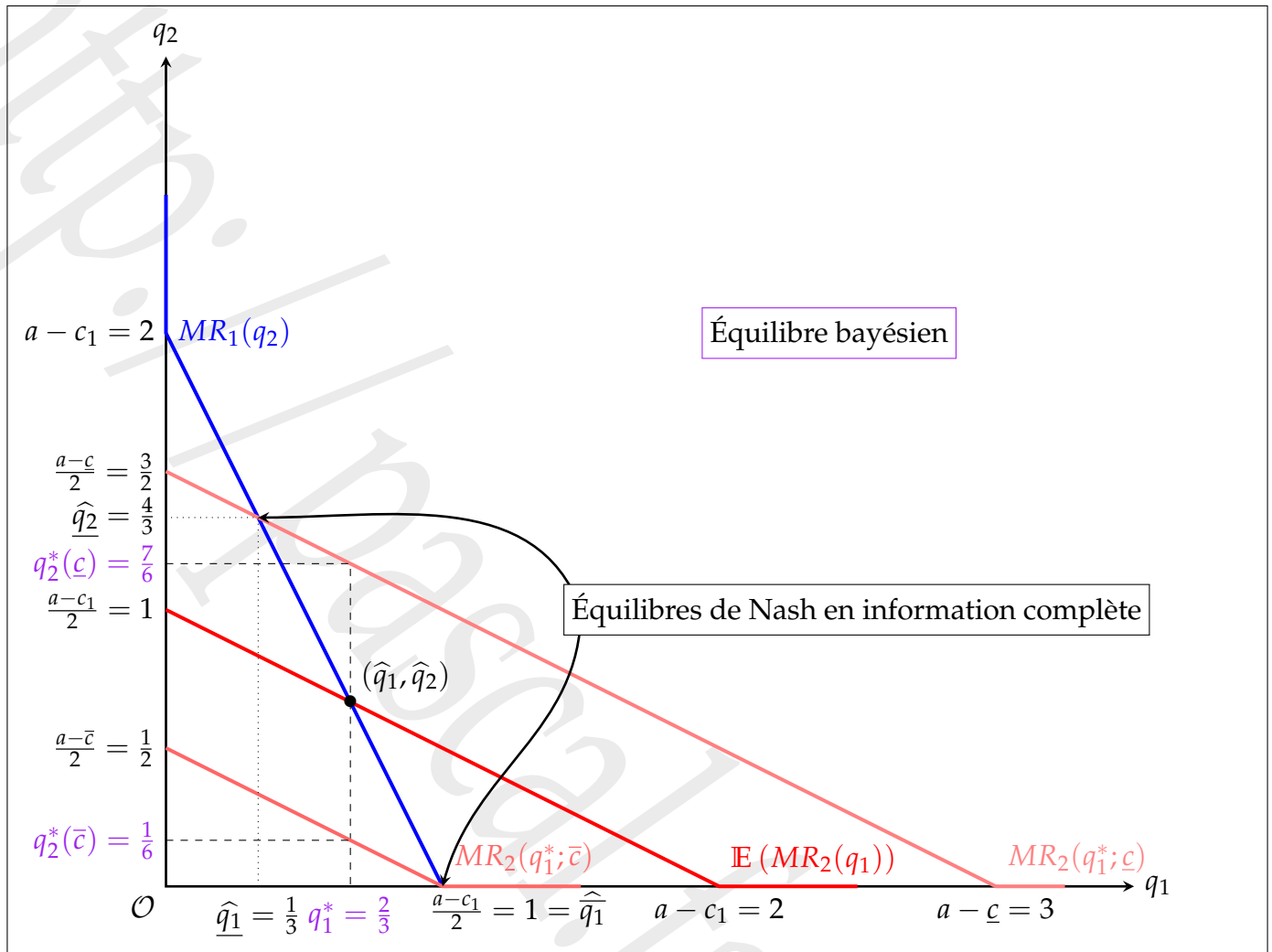


Figure 2.3 : EB dans le modèle de Cournot

**Exercice 17 : Differentiated duopoly with uncertain demand**

Consider a monopolist facing

an uncertain inverse demand

$$p = \max\{a - bQ + \theta, 0\}. \tag{2.1}$$

When setting its price or quantity the monopolist does not know  $\theta$  but knows that  $\mathbb{E}[\theta] = 0$  and  $\mathbb{E}[\theta^2] = \sigma^2$ . The quadratic cost function of this firm is given by :

$$C(Q) = c_1Q + \frac{c_2Q^2}{2}, \tag{2.2}$$

with  $a > c_1 > 0$ ,  $c_2 > -2b$  and obviously  $b > 0$ .

- 1 – Determine the marginal cost function, noted  $C_m(Q)$ . Comment.
- 2 – Solve the monopolist's program if he sets the quantity.
- 3 – Write carefully  $\mathbb{E}(Q^2)$  and solve the monopolist's program if he sets the price.
- 4 – Show that the monopolist prefers to set a quantity if the marginal cost curve is increasing and a price if the marginal cost curve is decreasing. Provide a short intuition for the result using graphics.

Now consider a differentiated duopoly facing the uncertain inverse demand system :

$$\begin{cases} p_1 = \max\{a - bq_1 - dq_2 + \theta, 0\} & (2.3) \\ p_2 = \max\{a - bq_2 - dq_1 + \theta, 0\}, & (2.4) \end{cases}$$

with  $0 < d < b$ ,  $\mathbb{E}[\theta] = 0$  and  $\mathbb{E}[\theta^2] = \sigma^2$ . The cost function for firm  $i$ , for  $i = (1, 2)$ , is given by

$$C(q_i) = c_1 q_i + \frac{c_2 q_i^2}{2}, \text{ with } a > c_1 > 0 \text{ and } c_2 > -\frac{2(b^2 - d^2)}{b}.$$

5– Calculate the uncertain demand system. Which is the sign of the cross-price elasticity? Comment.

6– Qualify demands if  $d = 0$  and goods when  $b = d \neq 0$ .

Both firms play a one-shot game in which they choose the strategy variable and the value of this variable simultaneously. That is, each firm's strategy set is the union of all fixed quantities and all fixed prices. The purpose is in characterizing the Nash equilibria of this one-stage game in which strategic variables, i.e. the price or the quantity, are selected endogenously. The analysis is restricted to pure-strategy equilibria.

7– Suppose the duopolist  $j$  setting the quantity. In this case duopolist  $i$  ( $j \neq i$ ) could choose :

i) to compete in quantity. Calculate his best-response  $q_i(q_j)$  and his best-response payoff.

ii) to compete in price. Calculate his best-response  $p_i(q_j)$  and his best-response payoff.

8– Suppose the duopolist  $j$  setting the price. In this case duopolist  $i$  ( $j \neq i$ ) could choose<sup>1</sup> :

i) to compete in quantity. Calculate his best-response  $q_i(p_j)$  and his best-response payoff.

ii) to compete in price. Calculate his best-response  $p_i(p_j)$  and his best-response payoff.

9– Argue by the same line of reasoning as in question (4–) that

i) if  $c_2 > 0$  in the unique Nash equilibrium both firms choose quantities,

ii) if  $c_2 < 0$  in the unique Nash equilibrium both firms choose prices,

iii) if  $c_2 = 0$  there exist four Nash equilibria in pure strategies.

10– Show there are four Nash equilibria in pure strategies in the case with certain demand whatever  $c_2$ .

### Solution :

1) Differentiating (2.2) with respect to the quantity,  $Cm(Q) = c_1 + c_2 Q$ . This function is increasing if  $c_2 > 0$ .

2) If the monopolist chooses the quantity then his expected profit is equal to  $\mathbb{E}(\pi) = \mathbb{E}(p)Q - C(Q)$ . Using (2.1) and (2.2), and since  $\mathbb{E}(\theta) = 0$ , we have  $\mathbb{E}(\pi) = (a - bQ)Q - c_1 Q - \frac{c_2 Q^2}{2}$ . The monopolist's program is :

$$\mathcal{P}_{Mo} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{Q\} \end{array} (a - bQ)Q - c_1 Q - \frac{c_2 Q^2}{2}. \right. \quad (2.5)$$

The FOC of the program (2.5) gives us  $Q^{Mo_1} = \frac{a - c_1}{2b + c_2}$  the quantity produced by the monopolist. As  $a > c_2$  and  $c_2 > -2b$ , the quantity  $Q^{Mo_1}$  is positive and the SOC is satisfied. Thus market price is  $p^{Mo_1} = \max\left\{\frac{ab + ac_2 + bc_1}{2b + c_2} + \theta, 0\right\}$  and so  $\mathbb{E}(\pi^{Mo_1}) = \frac{(a - c_1)^2}{2(2b + c_2)}$ .

3) If the monopolist chooses the price then his expected profit is equal to  $\mathbb{E}(\pi) = p\mathbb{E}(Q) - \mathbb{E}(C(Q))$ . Using (2.2) and (2.1) we get :  $\mathbb{E}(Q^2) = \frac{\mathbb{E}((a - p)^2 + \theta^2 + 2(a - p)\theta)}{b^2} = \frac{(a - p)^2 + \mathbb{E}(\theta^2) + 2(a - p)\mathbb{E}(\theta)}{b^2} = \frac{(a - p)^2 + \sigma^2}{b^2}$ , since  $\mathbb{E}(\theta) = 0$  and  $\mathbb{E}(\theta^2) = \sigma^2$ . The monopolist's program is :

$$\mathcal{P}_{Mo} \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{p\} \end{array} \mathbb{E}(\pi) = p \left( \frac{a - p}{b} \right) - c_1 \left( \frac{a - p}{b} \right) - \frac{c_2}{2b^2} \left( (a - p)^2 + \sigma^2 \right). \right. \quad (2.6)$$

1. Rename  $\alpha := \frac{a(b - d)}{b}$ ,  $\beta := \frac{b^2 - d^2}{b}$ ,  $\gamma := \frac{d}{b}$ ,  $\Theta := \frac{\theta(b - d)}{b}$ .

The FOC of the program (2.6) gives us the price chosen by the monopolist  $p^{M02} = \max\{\frac{ab+ac_2+bc_1}{2b+c_2}, 0\}$ . As  $c_2 > -2b$  the SOC is verified. Thus the quantity produced by the monopoly is  $Q^{M02} = \max\{\frac{a-c_1}{2b+c_2} + \frac{\theta}{b}, 0\}$  and  $\mathbb{E}(\pi^{M02}) = \frac{(a-c_1)^2}{2(2b+c_2)} - \frac{c_2\sigma^2}{2b^2}$ .

- 4) Using these results we get  $\mathbb{E}(\pi^{M01}) - \mathbb{E}(\pi^{M02}) = \frac{c_2\sigma^2}{2b^2}$ . Hence if  $c_2$  is negative, the marginal curve is decreasing and the monopolist prefers to choose the price. The monopolist is indifferent between setting price or quantity only when the marginal cost is constant. In the other case he prefers to choose the quantity. With a linear demand and an additive shock, expected output setting the price equals the output level when the monopolist sets the quantity. But also the expected price setting the quantity equals the price level chosen when the monopolist sets the price. So whatever the strategy the monopolist chooses the expected revenue is the same. The difference in terms of expected profits comes only from the relative size of expected costs. For convex, i.e.  $c_2 > 0$ , (concave) costs, a fixed level of output is more (less) attractive than a random level with a same mean. The firm so prefers setting quantity (price).

Let us name  $Q^*$  the *ex post* profit-maximizing quantity given  $\theta$  in order to make an alternative explanation. For a graphical interpretation refer to Figure 2.4, which compares for a particular realization of the random variable  $\theta$  the profit done by the monopolist setting the quantity, gray area, and the profit done by setting the price, gray plus blue minus red area. It is so better to set price, for the monopolist, if the blue area is greater than the red area. Since the marginal revenue curve,  $Rm(Q)$ , is twice as steep as the demand curve  $RM(Q)$ ,  $Q^*$  is halfway between  $Q^{M01}$  and  $Q^{M02}$  represented by the green dash when the marginal cost curve is flat (Figure 2.4b). In this case blue area equals to red area so the monopolist is indifferent between setting price or quantity. When marginal cost curve slopes upward  $Q^*$  is closer to  $Q^{M01}$  which implies geometrically that the blue area is smaller than the red one (Figure 2.4a). It is better for the monopolist to set the quantity. By the opposite when the marginal cost curve slopes downward (Figure 2.4c)  $Q^*$  is closer to  $Q^{M02}$  which implies that the blue area is greater than the red one and so it is profitable to set the price.

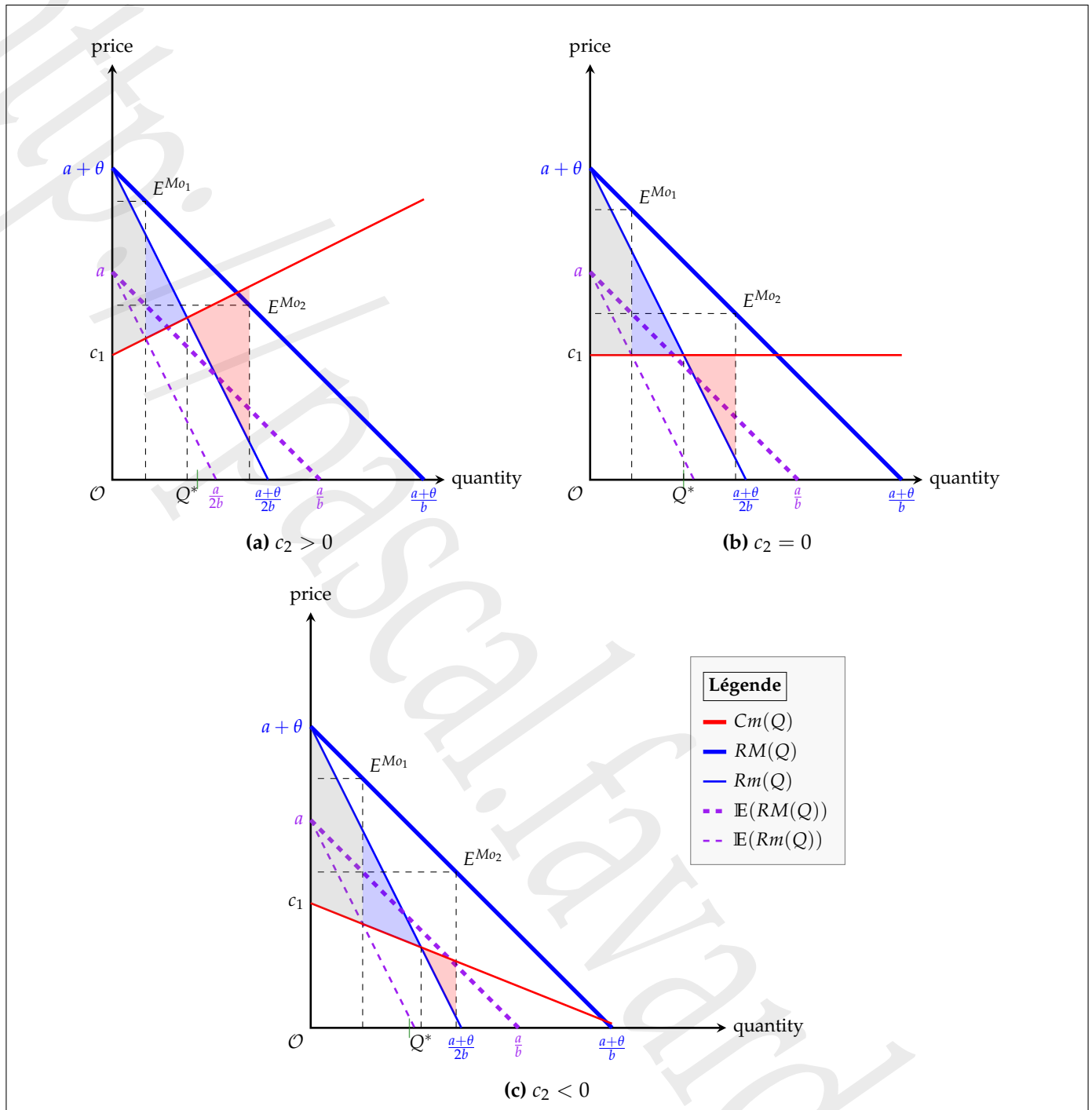


Figure 2.4 : Setting price or quantity ?

5) Using (2.3) and (2.4)

$$\begin{cases} q_1 = \max\left\{\frac{a + \theta}{b + d} + \frac{dp_2 - bp_1}{b^2 - d^2}, 0\right\}, & (2.7) \\ q_2 = \max\left\{\frac{a + \theta}{b + d} + \frac{dp_1 - bp_2}{b^2 - d^2}, 0\right\}. & (2.8) \end{cases}$$

Since  $b > d > 0$  the cross-price elasticities are positive, goods are substitutes.

6) When  $d = 0$  demands are independent and when  $b = d \neq 0$  the goods produced by the duopolists are perfect substitutes.

7)  $j$  setting the quantity and choosing the level  $q_j$ , the  $i$ 's inverse residual demand is  $p_i = \max\{a - bq_i - dq_j + \theta, 0\}$  and his residual demand is  $q_i = \max\left\{\frac{a + \theta - dq_j - p_i}{b}, 0\right\}$



i. Using  $i$ 's inverse residual demand,  $\mathbb{E}(\pi_i) = \mathbb{E}((a - bq_i - dq_j + \theta)q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2)$ . As  $\mathbb{E}(\theta) = 0$ , the duopolist  $i$  setting the quantity has to solve :

$$\mathcal{P}_{Duo} \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{\{q_i\}} \mathbb{E}(\pi_i) = (a - bq_i - dq_j) q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

The FOC of the optimization program (2.9) gives us  $q_i(q_j) = \max\{\frac{a-c_1-dq_j}{2b+c_2}, 0\}$  and the SOC is  $c_2 > -2b$  which is true since  $c_2 > -\frac{2(b^2-d^2)}{b}$ . Then the clearing-market price is  $p_i = \max\{\frac{ab+bc_1+ac_2-dq_j(b+c_2)}{2b+c_2} + \theta, 0\}$ . Thus best-response payoff is :  $\mathbb{E}(\pi_i(q_j)) = \frac{(a-c_1-dq_j)^2}{2(2b+c_2)}$ .

ii. Using  $i$ 's residual demand,  $\mathbb{E}(\pi_i) = \mathbb{E}((\frac{a+\theta-dq_j-p_i}{b})p_i - c_1(\frac{a+\theta-dq_j-p_i}{b}) - \frac{c_2}{2}(\frac{a+\theta-dq_j-p_i}{b})^2)$ . Then duopolist's program is :

$$\mathcal{P}_{Duo} \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{\{p_i\}} \mathbb{E}(\pi_i) = \left(\frac{a-dq_j-p_i}{b}\right) p_i - c_1 \left(\frac{a-dq_j-p_i}{b}\right) - \frac{c_2}{2} \left(\frac{a-dq_j-p_i}{b}\right)^2 - \frac{c_2\sigma^2}{2b^2}. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

The FOC of the optimization program (2.10) gives us  $p_i(q_j) = \max\{\frac{ab+bc_1+ac_2-dq_j(b+c_2)}{2b+c_2}, 0\}$  and the SOC is  $c_2 > -2b$  which is true since  $c_2 > -\frac{2(b^2-d^2)}{b}$ . The  $i$ 's residual quantity demanded is  $q_i = \max\{\frac{a-c_1-dq_j}{2b+c_2} + \frac{\theta}{b}, 0\}$ . Thus best-response payoff is :  $\mathbb{E}(\pi_i(q_j)) = \frac{(a-c_1-dq_j)^2}{2(2b+c_2)} - \frac{c_2\sigma^2}{2b^2}$ .

8)  $j$  setting the price and choosing the level  $p_j$ , the  $i$ 's residual demand is  $q_i = \max\{\frac{a+\theta}{b+d} + \frac{dp_j-bp_i}{b^2-d^2}, 0\}$  and his inverse residual demand is  $p_i = \max\{\frac{1}{b}[(a+\theta)(b-d) + dp_j - (b^2-d^2)q_i], 0\}$ .

i. Using  $i$ 's inverse residual demand,  $\mathbb{E}(\pi_i) = \mathbb{E}((\frac{1}{b}[(a+\theta)(b-d) + dp_j - (b^2-d^2)q_i])q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2)$ . As  $\mathbb{E}(\theta) = 0$ ,  $\mathbb{E}(\pi_i) = (\frac{1}{b}[a(b-d) + dp_j - (b^2-d^2)q_i])q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2$ . Using new notations we could rewrite this expected profit :  $\mathbb{E}(\pi_i) = (\alpha + \gamma p_j - \beta q_i)q_i - c_1q_i - \frac{c_2}{2}q_i^2$ . The duopolist  $i$  setting the quantity has to solve (2.9) putting  $(\alpha, \beta, \gamma p_j, \Theta)$  instead of  $(a, b, -dq_j, \theta)$  so without calculus we get  $q_i(p_j) = \max\{\frac{\alpha-c_1+\gamma p_j}{2\beta+c_2}, 0\}$  and  $p_i = \max\{\frac{\alpha\beta+\beta c_1+ac_2+\gamma p_j(\beta+c_2)}{2\beta+c_2} + \Theta, 0\}$ . Thus  $\mathbb{E}(\pi_i(p_j)) = \frac{(\alpha-c_1+\gamma p_j)^2}{2(2\beta+c_2)}$ . Note that the SOC is  $c_2 > -2\beta$  so  $c_2 > -\frac{2(b^2-d^2)}{b}$ , which is true under ours assumptions.

ii. Using  $i$ 's residual demand,  $\mathbb{E}(\pi_i) = \mathbb{E}((\frac{\alpha+\gamma p_j-p_i+\Theta}{\beta})p_i - c_1(\frac{\alpha+\gamma p_j-p_i+\Theta}{\beta}) - \frac{c_2}{2}(\frac{\alpha+\gamma p_j-p_i+\Theta}{\beta})^2)$ , the duopolist  $i$  setting the price has to solve (2.10) putting  $(\alpha, \beta, \gamma p_j, \Theta)$  instead of  $(a, b, -dq_j, \theta)$  so without calculus we get  $p_i(p_j) = \max\{\frac{\alpha\beta+\beta c_1+ac_2+\gamma p_j(\beta+c_2)}{2\beta+c_2}, 0\}$  and thus  $q_i = \max\{\frac{\alpha-c_1+\gamma p_j}{2\beta+c_2} + \frac{\Theta}{\beta}, 0\}$ . Thus  $\mathbb{E}(\pi_i(p_j)) = \frac{(\alpha-c_1+\gamma p_j)^2}{2(2\beta+c_2)} - \frac{c_2\Sigma^2}{2\beta^2}$ . Note that the SOC is  $c_2 > -2\beta$  so  $c_2 > -\frac{2(b^2-d^2)}{b}$ , which is true under ours assumptions.

9) As the expected payoff when  $i$  setting quantity minus his expected payoff setting price is equal to  $-\frac{c_2\sigma^2}{2b^2}$  or  $-\frac{c_2\Sigma^2}{2\beta^2}$ , then :

i. if  $c_2 > 0$ , then it is a dominant strategy for both firms to set quantities. There is so an unique Cournot equilibrium.

ii. if  $c_2 < 0$ , then it is a dominant strategy for both firms to set prices. There is so an unique Bertrand equilibrium.

iii. if  $c_2 = 0$ , firms are indifferent between choosing prices and quantities. There are four Nash equilibria in pure strategies :  $NE = \{(price, quantity), (quantity, price), (quantity, quantity), (price, price)\}$ .

10) No uncertainty in our model is equivalent to assume  $\sigma = 0$ , so  $\Sigma = 0$ . Then  $i$  is indifferent between choosing quantity and price whatever  $j \neq i$  setting. There are four Nash equilibria in pure



strategies :  $NE = \{(price, quantity), (quantity, price), (quantity, quantity), (price, price)\}$ .

### Exercice 18 : Forclore

Considérons un monopole  $H$  produisant un bien en quantité  $Q$  qui n'a pas accès aux consommateurs finaux. Il y a seulement deux entreprises,  $B_1$  et  $B_2$ , susceptibles de (re)vendre  $q_1$  (resp.  $q_2$ ) unités du bien produit par  $H$  aux consommateurs finaux. Ce bien n'a aucun substitut pour ces consommateurs. Le coût marginal de  $H$  est constant et égal à  $c$ , avec  $c \in [\frac{3}{4}, 1[$ . Le coût marginal des (re)vendeurs est supposé nul. Sans perte de généralité on considèrera qu'aucune entreprise dans cette économie ne subit de coût fixe. La fonction de demande inverse agrégée pour le bien considéré, sur le marché final, est :

$$D^{-1}(Q) = \max\{1 - Q, 0\}. \quad (2.1)$$

Au besoin on supposera *the efficient-rationing rule* vérifiée ; la firme proposant le plus petit prix « passe en premier » et sert, si à ce prix là il y a excédent de demande, les consommateurs ayant les dispositions à payer les plus élevées.

1 – Si le monopole  $H$ , non-discriminant, avait un accès direct aux consommateurs finaux quel serait l'équilibre de marché, noté  $E^A$  ?

2 – Quel est la valeur du surplus social, notée  $SS^A$ , en  $E^A$  ?

3 – Quel serait la valeur du surplus social, notée  $SS^{Co}$ , à l'équilibre concurrentiel ? Commentez.

Supposons que le jeu soit séquentiel. À l'étape 1,  $H$  propose un tarif  $T_i(\bar{q}_i)$  à l'entreprise  $B_i$  qui lui passe commande de  $\bar{q}_i$  unités de bien (i.e. son stock à l'étape 2) et donc paye en retour  $T_i(\bar{q}_i)$ . À l'étape 2, l'entreprise  $B_i$  observe le stock de son concurrent et fixe son prix unitaire de vente aux consommateurs finaux. Le réassort est supposé impossible.

4 – À l'étape 2 le sous jeu est-il du type concurrence à la Cournot ou la Bertrand, avec ou sans contrainte de capacité ?

5 – Résoudre le sous-jeu à l'étape 2 revient à déterminer le prix de vente choisi par chacun des duopoleurs.

i) Montrez que  $B_1$  n'achètera jamais un stock  $\bar{q}_1 \geq \frac{1}{3}$  même si le prix unitaire facturé par le monopole est égal à  $c$ . (astuce : calculez le profit de  $B_1$  si elle était en situation de monopole sur le marché final)

ii) Écrivez la recette de  $B_i$  en fonction de  $p$  le prix de vente qu'elle choisit et de  $\bar{q}_j$ ,  $j \neq i$ . Montrez que c'est équivalent à écrire cette recette en fonction de la quantité qu'elle décide de mettre sur le marché final  $q_i$ ,  $q_i \leq \bar{q}_i$ , et de  $\bar{q}_j$ .

iii) Montrez que pour  $B_i$  il est optimal de mettre sur le marché tout son stock  $\bar{q}_i$ , sachant que  $B_j$  met sur le marché le sien (i.e.  $\bar{q}_j$ ). En déduire la fonction qui donne le prix choisi par ces deux entreprises.

À partir de maintenant on pose  $\pi_{B_i}(\bar{q}_i; \bar{q}_j) = (1 - \bar{q}_i - \bar{q}_j)\bar{q}_i - T_i(\bar{q}_i)$ ,  $i \neq j$ , la fonction de profit de l'entreprise  $B_i$ . Dans un premier temps supposons que les contrats proposés par  $H$  aux deux entreprises soient connaissance commune.

6 – Déterminez les contrats  $(q_1^{ns}, T_1^{ns})$  et  $(q_2^{ns}, T_2^{ns})$  proposés par  $H$  à l'étape 1 à  $B_1$  et  $B_2$ . Déduisez-en le profit,  $\pi_H^{ns}$ , de  $H$ .

7 – Le monopole  $H$  a-t-il intérêt « d'exclure » du marché intermédiaire une des entreprises  $B$  ? Commentez.

Dans un second temps supposons que les contrats proposés par  $H$  aux deux entreprises ne soient pas connaissance commune.

8 – En supposant que le contrat « déjà » négocié entre  $H$  et  $B_1$  soit  $(q_1^{s1}, T_1^{s1}) = \left(\frac{1-c}{4}, \frac{1-c^2}{8}\right)$ , rappelons que  $B_2$  ne connaît pas ce contrat : quelle quantité,  $q_2^{s1}$ , a intérêt de proposer  $H$  à  $B_2$ , sachant que ce dernier doit l'accepter bien-sûr ? Comparez  $q_1^{s1}$  et  $q_2^{s1}$ .

9 – Calculez  $\pi_H^{s1}$  le profit de  $H$  si  $(q_1^{s1}, T_1^{s1}) = \left(\frac{1-c}{4}, \frac{1-c^2}{8}\right)$ .

10 – Calculez le profit de  $B_1$ ,  $\pi_{B_1}^{s1}$ , si  $(q_1^{s1}, T_1^{s1}) = \left(\frac{1-c}{4}, \frac{1-c^2}{8}\right)$ . Crédible ?

11 – Supposons que  $B_1$  et  $B_2$  conjecturent que le monopole  $H$  va leur proposer la même quantité, notée  $q^{s2}$  avec donc  $Q^{s2} = 2q^{s2}$ , et que cette conjecture soit connaissance commune. Calculez  $\pi_H^{s2}$  le profit de  $H$ . Crédible ? Commentez.

12 – Si à présent on suppose, contrairement au cas précédent, qu'aucun duopoleur ne révise ses croyances sur le contrat offert à son concurrent par  $H$  quelque soit le contrat qu'il se voit proposer. Les conjectures sont dites « passives » ou *market-by-market-bargaining*. Calculez l'équilibre de Nash. Calculez  $\pi_H^{s3}$  le profit de  $H$ . Calculez le surplus social  $SS^{s3}$ . Commentez.

### Solution :

1) Dans ce cas  $H$  ne passe pas par des revendeurs, il est donc en situation de monopole sur le marché final. Son programme est :

$$\mathcal{P}_H \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{\{Q\}} \pi = (D^{-1}(Q) - c)Q \\ \text{s.t. } D^{-1}(Q) = 1 - Q \end{array} \right. \quad (2.2)$$

La CN1 de (2.2) donne :  $Q_H^A = \frac{1-c}{2}$  et la CS2 est vérifiée puisque  $-2 < 0$ . La quantité  $Q_H^A$  est positive puisque  $c < 1$ . Le prix unitaire est donné par (2.1) en utilisant la valeur de  $Q_H^A$ ,  $p_H^A = \frac{1+c}{2}$ . On a donc  $E_H^A = (Q_H^A, p_H^A) = \left(\frac{1-c}{2}, \frac{1+c}{2}\right)$ .

2) À l'équilibre,  $E_H^A$ , le profit de  $H$  est  $\pi_H^A = \frac{(1-c)^2}{4}$  et le surplus des consommateurs  $SC_H^A = \frac{(1-c)^2}{8}$ . Par définition on a  $SS^A = \pi_H^A + SC^A$  et donc  $SS^A = \frac{3(1-c)^2}{8}$ .

3) À l'équilibre concurrentiel le prix est égal au coût marginal. Le profit côté production serait nul. La quantité consommée si  $p = c$  est  $Q^{Co} = 1 - c$ . On a donc  $SS^{Co} = \frac{(1-c)^2}{2}$ , le surplus social en situation hypothétique de concurrence pure et parfaite est plus grand qu'en situation monopolistique.

4) À l'étape 2 le jeu est du type concurrence à la Bertrand avec contrainte de capacité. Le marché de la revente est un duopole avec concurrence en prix mais comme le réassort est impossible les duopoleurs sont contraints à l'étape 2 par les quantités achetées à l'étape 1 au monopole  $H$ .

5) Les entreprises  $B_1$  et  $B_2$  étant identiques en tout point et puisqu'elles vendent un produit homogène, montrons que le prix unitaire de revente sera égal  $p(q_1 + q_2)$ .

*i.* L'entreprise  $B_i$  a acheté une quantité  $\bar{q}_i$  en première période. Étant donné que  $c \in \left[\frac{3}{4}, 1\right[$  et que la disposition maximale à payer des consommateurs finaux est inférieure à l'unité cette quantité  $\bar{q}_i$  a été achetée au monopole  $H$  à un prix,  $T_i$ , appartenant à l'intervalle  $\left[\frac{3}{4}, 1\right[$ . À  $\bar{q}_i$  donné le plus grand profit brut de seconde période pour  $B_i$  est celui qu'elle ferait si elle était en situation de monopole i.e.  $\frac{1}{4}$ . Le marché final étant duopolistique le profit net du coût d'acquisition de  $\bar{q}_i$  est donc au mieux :  $\frac{1}{4} - T_i \bar{q}_i$ . Ce profit est négatif si  $\bar{q}_i \geq \frac{1}{3}$ , même si la situation est « très favorable »

- i.e.  $T_i = \frac{3}{4}$ . L'entreprise  $B_i$ , en première période, ne s'engagera donc pas sur une capacité  $\bar{q}_i \geq \frac{1}{3}$ .
- ii. En utilisant (2.1), on a  $R_i(p; \bar{q}_j) = p(1 - p - \bar{q}_j)$  et donc  $R_i(q_i; \bar{q}_j) = (1 - q_i - \bar{q}_j)q_i$ , avec  $i \neq j$ .
- iii. Supposons que  $B_2$  mette sur le marché  $\bar{q}_2$ , montrons que la meilleure réaction de  $B_1$  est de mettre sur le marché  $\bar{q}_1$  et donc le prix sur le marché final sera  $p^* = 1 - \bar{q}_1 - \bar{q}_2$ . À l'étape 2 l'entreprise  $B_1$  si elle veut vendre à un prix unitaire  $p > p^*$  elle doit ne pas mettre la totalité de sa capacité  $\bar{q}_1$  sur le marché. Le profit brut de  $B_1$  si elle mets sur le marché  $q_1 < \bar{q}_1$ , par hypothèse elle peut pas mettre plus, est  $\pi(q_1; \bar{q}_2) = (1 - q_1 - \bar{q}_2)q_1$ , cette fonction est concave en  $q_1$  puisque  $-2 < 0$  et son maximum est atteint en  $q_1 = \frac{1 - \bar{q}_2}{2}$ . Or  $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) \in [0, \frac{1}{3}[ \times [0, \frac{1}{3}[$  donc  $\frac{1 - \bar{q}_2}{2} > \frac{1}{3}$ , l'entreprise fera un profit brut maximum en mettant toute sa capacité sur le marché sachant que l'entreprise  $B_2$  en fait de même. Par symétrie on arrive à la même conclusion pour le duopoleur  $B_2$ . La fonction de profit net du duopoleur  $B_i$  sous forme réduite (*reduced-form profit function*) est  $\pi_i(\bar{q}_i, \bar{q}_j) = \left[ (1 - \bar{q}_i - \bar{q}_j) - T_i \right] \bar{q}_i$  si  $T_i$  est linéaire par rapport à la quantité  $\bar{q}_i$ . Notons que fonction de profit a la même forme que la fonction de profit d'un duopoleur jouant un jeu à la Cournot. Tout ce passe comme si chaque duopoleur dépose chez un « commissaire priseur » bienveillant une quantité (capacité) et le prix est déterminé par celui-ci de telle sorte qu'il n'y ait aucun excédent (*market-clearing price*)

- 6) Les deux entreprises  $B$  étant identiques en tout point supposons que  $H$  propose le même contrat aux deux. Son programme est :

$$\mathcal{P}_H \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{\{q_i, T_i\}} \pi = 2(T_i - cq_i) \\ \text{s.t. } T_i(q_i) = \mathcal{D}^{-1}(2q_i)q_i = (1 - 2q_i)q_i \end{array} \right. \quad (2.3)$$

La CN1 de (2.3) donne :  $q_i^{ns} = \frac{1-c}{4}$  et la CS2 est vérifiée puisque  $-4 < 0$ . En utilisant (2.1) on a  $T_i^{ns} = \frac{1-c^2}{8}$ . On a donc :  $(q_i^{ns}, T_i^{ns}) = \left( \frac{Q_H^A}{2}, \frac{p_H^A Q_H^A}{2} \right)$ . Ce n'est pas le seul contrat possible,  $\forall \alpha \in [0, 1]$ , tous les contrats de la forme  $(q_1^{ns}, T_1^{ns}) = (\alpha Q_H^A, \alpha p_H^A Q_H^A)$  et  $(q_2^{ns}, T_2^{ns}) = ((1 - \alpha)Q_H^A, (1 - \alpha)p_H^A Q_H^A)$  procurent le même profit,  $\pi_H^{ns} = \pi_H^A$  au monopole  $H$ .

- 7)  $H$  n'a aucun intérêt à le faire, la forclusion verticale n'apporte rien puisque  $\pi_H^{ns} = \pi_H^A$ .
- 8) Remarquons tout d'abord que par hypothèse  $q_1^{s1} = q_1^{ns} = \frac{Q_H^A}{2}$ . Le programme de « négociation » de  $H$  avec  $B_2$  est :

$$\mathcal{P}_H \left| \begin{array}{l} \text{Max}_{\{q_2\}} \pi = \left( 1 - \frac{Q_H^A}{2} - q_2 - c \right) q_2 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

La CN1 de (2.4) donne :  $q_2^{s1} = \frac{3(1-c)}{8}$  et la CS2 est vérifiée puisque  $-2 < 0$ . La quantité  $q_2^{s1}$  est acceptée par  $B_2$  puisqu'elle lui permet de faire un profit nul. Cette quantité est une fois et demi plus grande que celle « négociée » avec  $B_1$ . En fait cette quantité est la « meilleure réaction Cournot » de  $B_2$  à la quantité  $\frac{Q_H^A}{2}$  achetée par  $B_1$ . En utilisant (2.1) et le fait que  $Q = q_2^{s1} + q_2^{s1}$ , on obtient  $T_2^{s1} = \frac{3+5c}{8}$ .

- 9) La profit de  $H$  est :  $\pi_H^{s1} = T_1^{s1} + T_2^{s1} - c(q_1^{s1} + q_2^{s1})$ . En utilisant les contrats proposés par  $H$  :  $\pi_H^{s1} = \frac{c^2+1}{2}$  et donc  $\pi_H^{s1} > \pi_H^A$ .
- 10) Le profit de  $B_1$ ,  $\pi_{B_1}^{s1}$ , est négatif. En effet  $\pi_{B_1}^{s1} = (1 - q_1^{s1} - q_2^{s1})q_1^{s1} - T_1^{s1}$ , on a donc :  $\pi_{B_1}^{s1} = \left( 1 - \frac{1-c}{4} - \frac{3(1-c)}{8} \right) \frac{1-c}{4} - \frac{1-c^2}{8} = -\frac{(c-1)^2}{32} < 0$ . Même si le monopole  $H$  ne dévoile pas les contrats,  $B_1$  se voyant proposer un tel contrat sait que  $H$  a intérêt à proposer la « quantité de Cournot » à

$B_2$  et donc que s'il accepte il,  $B_1$ , fera des pertes. Ce n'est donc pas crédible, jamais  $B_1$  n'acceptera  $(q_1^{s1}, T_1^{s1})$ .

11) Aucun calcul n'est nécessaire,  $H$  va proposer le contrat  $(q_i^{s2}, T_i^{s2}) = \left( \frac{Q_H^A}{2}, \frac{p_H^A Q_H^A}{2} \right)$ . Oui, cette proposition est crédible puisqu'elle respecte la conjoncture i.e. symétrie. L'entreprise  $B_i$  refuse de payer plus que  $\mathcal{D}^{-1}(2q_i)q_i$  si  $H$  lui propose  $q_i$ . Le profit de  $H$  est alors :  $(\mathcal{D}^{-1}(2q_i) - c) 2q_i$  et il est maximum pour  $q_i = \frac{Q_H^A}{2}$ . On a  $\pi_H^{s2} = \pi_H^A$ . La forclusion verticale n'apporterait toujours rien au monopole. Cette hypothèse de symétrie concerne aussi les offres « inattendues » (i.e. hors équilibre). Si un duopoleur reçoit un offre inattendue, il révisé ses croyances sur la quantité proposée à son concurrent.

12) Le programme joint de  $H$  et  $B_i$  est :

$$\mathcal{P}_H \left| \begin{array}{l} \text{Max} \\ \{q_i\} \end{array} \right. \pi = (1 - q_i - q_j - c) q_i \quad (2.5)$$

La CN1 de (2.5) donne :  $q_i(q_j) = \frac{1 - q_j - c}{2}$  et la CS2 est vérifiée puisque  $-2 < 0$ . La fonction  $q_i(q_j)$  est la fonction de meilleure réponse de  $B_i$  dans un jeu à la Cournot. À l'équilibre de Nash  $H$  propose le même contrat aux deux duopoleurs :  $(q^{s3}, T^{s3}) = \left( \frac{1-c}{3}, \frac{(1-c)(2c+1)}{9} \right)$ . On a donc :  $\pi_H^{s3} = 2T^{s3} - 2cq^{s3} = 2 \left( \frac{1-c}{3} \right)^2 < \pi_H^A$ . Les profits des duopoleurs sont nuls. Le surplus des consommateurs est  $SC^{s3} = 2 \left( \frac{1-c}{3} \right)^2$ , donc  $SS^{s3} = \pi_H^{s3} + SC^{s3} = 4 \left( \frac{1-c}{3} \right)^2 > SS^A$ . Cette conjecture passive entraîne une perte de profit pour le monopole  $H$  par rapport aux cas étudiés dans les questions précédentes. Le monopole a donc intérêt à mettre en place une forclusion verticale (e.g. licence, contrat de franchise). Notez que dans ce cas cela n'étend pas le pouvoir du monopole cela le rétablit.

# Liste des figures

	<b>Page</b>
1.1 Setting price or quantity? . . . . .	5
1.2 Meilleures réponses . . . . .	7
1.3 <i>EN</i> . . . . .	10
1.4 Géolocalisation : Marchands de glaces . . . . .	14
1.5 Marchands de glaces . . . . .	15
1.6 Marchands de glaces . . . . .	16
1.7 Espace des gains . . . . .	22
2.1 Arbre de Jeu . . . . .	28
2.2 Valeurs de $e(\bar{\theta})$ compatibles avec un équilibre séparateur . . . . .	31
2.3 EB dans le modèle de Cournot . . . . .	34
2.4 Setting price or quantity? . . . . .	37

# Liste des tables

	<b>Page</b>
1.1 Comparaisons par rapport à la qualité . . . . .	12
1.2 Matrice des profits . . . . .	13
1.3 Matrice de gains : Étape 1 . . . . .	21

# Index

Cartel, [18](#)

Concurrence à la

Bertrand, [2](#), [3](#), [19](#), [27](#)

Cournot, [3](#), [8](#), [18](#), [25](#), [32](#)

Critère

intuitif de Cho-Kreps, [30](#)

Différenciation, [3](#), [14](#)

Élasticité

prix croisés, [3](#)

Équilibre

monopole, [2](#)

oligopole, [2](#), [25](#)

Équilibre Parfait en Sous-Jeux, [8](#), [11](#)

Équilibre de Nash bayésien en

stratégies pures, [24](#), [25](#), [27](#), [32](#)

Équilibre de Nash en

stratégies pures, [3](#), [7](#), [11](#), [32](#)

Équilibre mélangeant, [28](#)

Équilibre séparateur, [28](#), [30](#)

Équilibre semi-séparateur, [28](#)

Forme

normale, [24](#), [25](#), [27](#), [32](#)

Jeu

répété, [11](#), [18](#), [21](#)

séquentiel, [7](#), [8](#), [28](#)

simultané, [3](#), [7](#), [14](#), [18](#), [25](#), [27](#), [32](#)



