Jeux et information

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

1er septembre 2016

Les chapitres

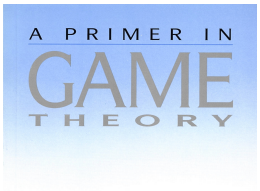
1. Jeux en information complète
2. Jeux en information incomplète
3. Jeux évolutionnaires

Chapitre 1 :

« Jeux en information complète »

Vive la lecture !

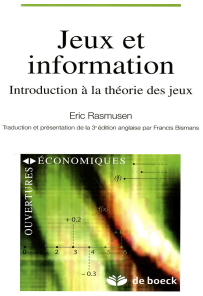
1. « A Primer in Game Theory » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds
2. « Jeux et information » par E. Rasmusen DeBoeck Université Eds
3. « Économie industrielle » par D.W. Carlton et J.M. Perloff DeBoeck Université Eds
4. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



Robert Gibbons

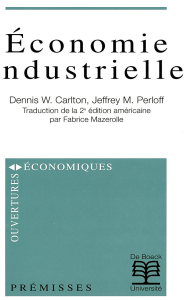
Vive la lecture !

1. « A Primer in Game Theory » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds
2. « Jeux et information » par E. Rasmusen DeBoeck Université Eds
3. « Économie industrielle » par D.W. Carlton et J.M. Perloff DeBoeck Université Eds
4. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



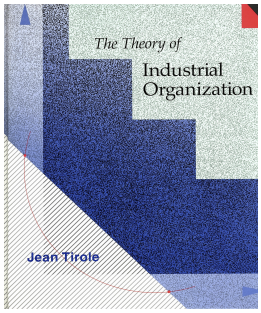
Vive la lecture !

1. « A Primer in Game Theory » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds
2. « Jeux et information » par E. Rasmusen DeBoeck Université Eds
3. « Économie industrielle » par D.W. Carlton et J.M. Perloff DeBoeck Université Eds
4. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



Vive la lecture !

1. « A Primer in Game Theory » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds
2. « Jeux et information » par E. Rasmusen DeBoeck Université Eds
3. « Économie industrielle » par D.W. Carlton et J.M. Perloff DeBoeck Université Eds
4. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



Plan

1. Introduction
2. Jeux statiques
3. Jeux dynamiques
4. Jeux répétés

1. Introduction

2. Jeux statiques

3. Jeux dynamiques

4. Jeux répétés

Contexte

Définition :
La théorie des jeux : étude des problèmes de décisions dans le cas d'interactions (économiques) stratégiques entre les agents

- Oligopole
- Marchandage
- Enchères
- Compétition entre pays

Jeux coopératifs Vs jeux non-coopératifs

Définition :
Un jeu coopératif est un jeu au cours duquel les joueurs peuvent prendre des engagements contraignants

- Cartel
- Collusion
- Unions économiques

Information complète Vs information parfaite

Définition :
Un jeu est en information complète si tous les joueurs connaissent parfaitement la structure du jeu.

Définition :
Un jeu est en information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs.

Rationalité Vs rationalité limitée

Définition :
Un agent est rationnel s'il est conscient de toutes les alternatives qui s'offrent à lui, fait des anticipations sur les éléments inconnus, possède des préférences transitives et réflexives et choisit ses actions après un processus d'optimisation.

Deux notions d'équilibres utilisées

- Équilibre de Nash (EN)
- Équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux (EPSJ)
- ~~Équilibre de Nash bayésien~~
- ~~Équilibre (de Nash) bayésien parfait~~

1. Introduction

2. Jeux statiques

3. Jeux dynamiques

4. Jeux répétés

Hypothèses

- Les joueurs (agents) jouent simultanément
- Les gains des joueurs dépendent de leurs actions
- Les joueurs sont en information complète

http://pascal.favard.free.fr/

Hypothèses

- Les joueurs (agents) jouent simultanément
- Les gains des joueurs dépendent de leurs actions
- Les joueurs sont en information complète

⇒ La fonction de gain de chaque joueur est connue de tous

2. Jeux statiques
2.1 Équilibre de Nash
2.2 Modèle de Cournot (1838)
2.3 Modèle de Bertrand (1883)

Équilibre de Nash

Définition :

Dans un jeu sous forme normale à N-joueurs $G = \{S_1, ..., S_N; u_1, ..., u_N\}$, les stratégies $(s_1^*, ..., s_N^*)$ sont un équilibre de Nash si pour chaque joueur i, s_i^* est la meilleure réponse aux stratégies données pour les $N-1$ autres joueurs, $(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_N^*)$:

$$\forall s_i \in S_i \; ; u_i(s_1^*, .., s_i^*, .., s_N^*) \geq u_i(s_1^*, .., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, .., s_N^*)$$

Donc s_i^* est solution de :

$$\underset{s_i \in S_i}{\text{Max}} \; u_i(s_1^*, .., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, .., s_N^*)$$

Existence

- **EN** est un concept plus fort que l'élimination des stratégies strictement dominées
- N'est-il pas trop fort, existe t'il toujours un EN ?
- Nash [1950] a montré qu'il existe au moins EN dans chaque jeu fini (i.e. espace des stratégies et des joueurs finis)
- Attention ne pas confondre existence et unicité !

2. Jeux statiques
2.1 Équilibre de Nash
2.2 Modèle de Cournot (1838)
2.3 Modèle de Bertrand (1883)

Antoine-Augustin Cournot (1801-1877)

- Soit un bien homogène produit simultanément par deux entreprises (Duopole)
- Soit une demande (inverse) agrégée pour ce bien :

$$P(Q) = max\{0, a - Q\}$$

Avec $Q = q_1 + q_2$

- Supposons que le coût marginal est constant et qu'il n'y ait pas de coût fixe. Donc $C_i(q_i) = cq_i$ avec $c < a$

Forme normale du jeu

- Deux joueurs : En_1 et En_2
- $s_i = q_i \in [0, +\infty[$
- $S_i \equiv [0, +\infty[$
- Gains : $\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(q_i + q_j) - c] = q_i[a - (q_i + q_j) - c]$

Il faut écrire les fonctions de meilleure réponse.

- L'objectif de En_i est la maximisation du profit :

$$\mathscr{P}_{En_i} \left| \; \underset{\{q_i\}}{\text{Max}} \; \pi_i(q_i, q_j) \right. \tag{1}$$

CN1 : $\dfrac{\partial \pi_i(q_i^*, q_j)}{\partial q_i} = 0$

CS2 : $\dfrac{\partial^2 \pi_i(q_i, q_j)}{\partial q_i^2} \leq 0$

Ici :

$$\mathscr{P}_{En_i} \left| \; \underset{\{q_i\}}{\text{Max}} \; q_i[a - (q_i + q_j) - c] \right. \tag{2}$$

CN1 : $[a - (q_i^* + q_j) - c] - q_i^* = 0 \Rightarrow q_i^* = \dfrac{a - q_j - c}{2}$

CS2 : $-2 \leq 0$ vraie

http://pascal.favard.free.fr/

Les fonctions de meilleure, $MR_i(q_j)$, réponse sont donc :

$$MR_1(q_2) = \frac{a - q_2 - c}{2} \text{ et } MR_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

- L'EN est solution du système suivant : $\begin{cases} q_1 = \dfrac{a - q_2 - c}{2} \\ q_2 = \dfrac{a - q_1 - c}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^* = max\left(\dfrac{a-c}{3}, 0\right) \\ q_2^* = max\left(\dfrac{a-c}{3}, 0\right) \end{cases}$$

Figure 1 – EN dans le modèle de Cournot

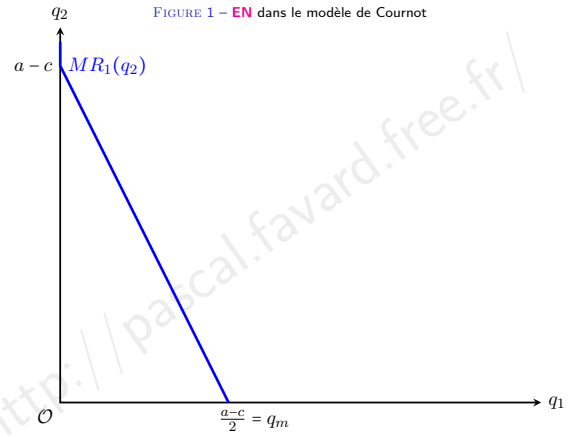


Figure 1 – EN dans le modèle de Cournot

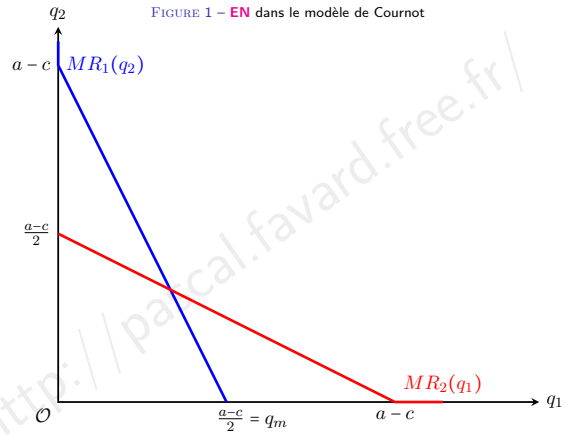
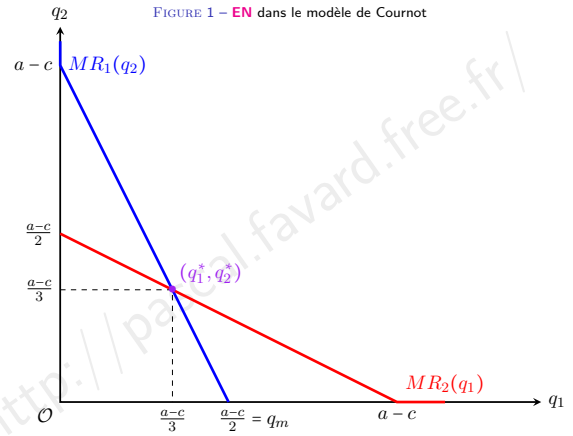


Figure 1 – EN dans le modèle de Cournot



Commentaires

- $q_1^* = q_2^*$ logique !
- $Q^* = q_1^* + q_2^* = \dfrac{a-c}{3} + \dfrac{a-c}{3} = \dfrac{2(a-c)}{3}$

$$\Rightarrow P_d^* = P(Q^*) = a - Q^* = a - \frac{2(a-c)}{3} = \frac{a+2c}{3}$$

$$\Rightarrow \pi_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*[P_d^* - c] = \frac{a-c}{3}\left[\frac{a+2c}{3} - c\right] = \left(\frac{a-c}{3}\right)^2 = \pi_2(q_1^*, q_2^*)$$

Comparaison avec le monopole

Voyons ce qu'aurait produit le monopole dans cette situation. L'objectif du monopole est la maximisation du profit :

$$\mathscr{P}_{monopole} \left| \; \underset{\{Q_m\}}{\text{Max}} \; \pi_i(Q_m, 0) = Q_m[a - Q_m - c] \right. \qquad (3)$$

CN1 : $[a - Q_m^* - c] - Q_m^* = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_m^* = \dfrac{a-c}{2} \quad (Q_m^* = 0 \; si \; a < c)$

CS2 : $-2 \leq 0$ vraie

- Donc : $Q_m^* \geq q_i^*$;
- $\pi_m(Q_m^*) = \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow \pi_m(Q_m^*) > \pi_i(q_1^*, q_2^*)$;
- $P_m^* = (a - Q_m^*) = (a - \dfrac{a-c}{2}) = \dfrac{a+c}{2} > \dfrac{a+2c}{3} = P_d^* \; (a > c)$.

- Notons que : $\frac{\pi_m(q_m^*)}{2} = \dfrac{(a-c)^2}{8} > \dfrac{(a-c)^2}{9} = \pi_i(q_1^*, q_2^*)$
- Pourquoi chaque entreprise ne produit pas $\dfrac{q_m}{2}$? Son profit serait plus grand !
- Comme aucune collusion n'est possible, chaque entreprise a intérêt à dévier...

2. Jeux statiques
2.1 Equilibre de Nash
2.2 Modèle de Cournot (1838)
2.3 Modèle de Bertrand (1883)

http://pascal.favard.free.fr/

Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)

- « Paradoxe » si biens homogènes...
- Soit deux biens différenciés mais substituts, chacun produit par une seule entreprise
- Simultanément chacune des deux entreprises choisit son prix p_i de vente
- $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$ demande pour le bien produit par l'En_i, $1 < b < 2$
- Supposons que le coût marginal soit constant et qu'il n'y ait pas de coût fixe. Donc $c_i(q_i) = cq_i$ avec $c < \frac{a}{1-b}$.

Forme normale du jeu

- Deux joueurs : En_1 et En_2
- $s_i = p_i \in [0, +\infty[$
- $S_i \equiv [0, +\infty[$
- Gains : $\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] = [a - p_i + bp_j][p_i - c]$

Le programme de l'entreprise i

L'objectif de En_i est la maximisation du profit :

$$\mathscr{P}_{En_i} \left| \; \underset{\{p_i\}}{\text{Max}} \; \pi_i(p_i, p_j) = \underset{p_i}{\text{Max}} \; [a - p_i + bp_j][p_i - c] \right. \qquad (4)$$

CN1 : $\dfrac{\partial \pi_i(p_i, p_j)}{\partial p_i} = a - 2p_i + bp_j + c = 0 \Rightarrow p_i^* = \dfrac{a + bp_j + c}{2}$

CS2 : $\dfrac{\partial^2 \pi_i(p_i, p_j)}{\partial p_i^2} = -2 \leq 0$ vraie

Les fonctions de meilleure réponse, $MR_i(p_j)$

$$MR_1(p_2) = \frac{a + bp_2 + c}{2} \text{ et } MR_2(p_1) = \frac{a + bp_1 + c}{2}$$

- L'EN est solution du système suivant : $\begin{cases} p_1 = \dfrac{a + bp_2 + c}{2} \\ p_2 = \dfrac{a + bp_1 + c}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} p_1^* = \dfrac{a + c}{2 - b} \\ p_2^* = \dfrac{a + c}{2 - b} \end{cases}$

$\Rightarrow q_1^* = q_2^* = \dfrac{a - c + bc}{2 - b} > 0$

$\Rightarrow \pi_1(p_1^*, p_2^*) = \pi_2(p_1^*, p_2^*) = \left(\dfrac{a - c + bc}{2 - b}\right)^2$

Figure 2 – EN dans le modèle de Bertrand

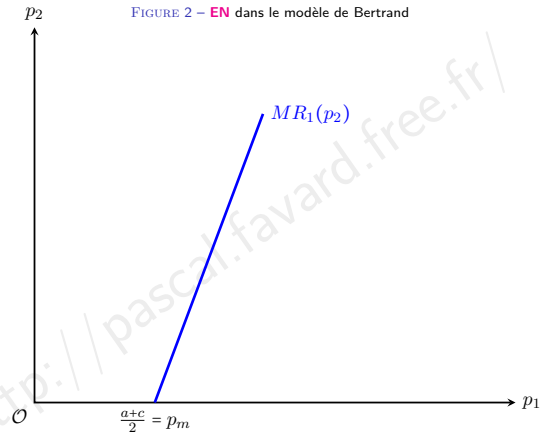


Figure 2 – EN dans le modèle de Bertrand

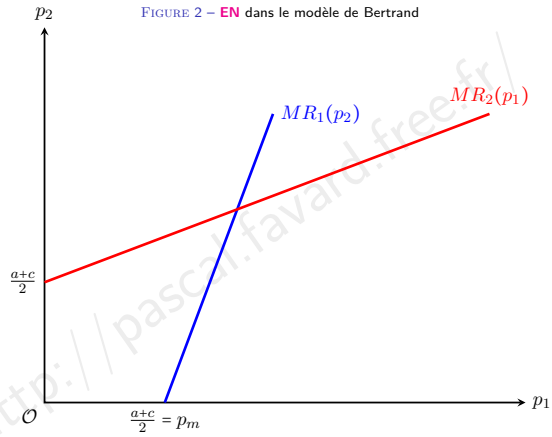
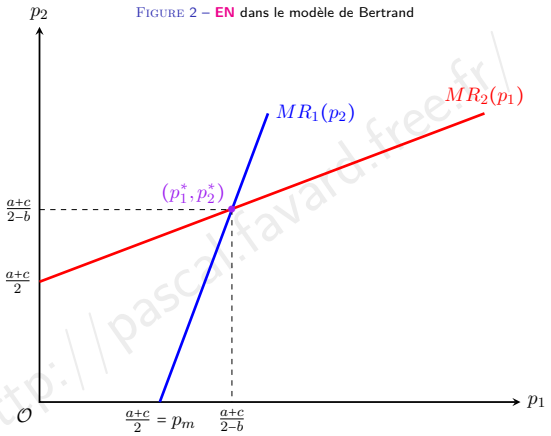


Figure 2 – EN dans le modèle de Bertrand



1. Introduction
2. Jeux statiques
3. Jeux dynamiques
4. Jeux répétés

http://pascal.favard.free.fr/

Hypothèses

- Les joueurs (agents) jouent séquentiellement
- Les gains des joueurs dépendent de leurs actions
- Les joueurs sont en information complète

⇒ La fonction de gain de chaque joueur est connue de tous

Équilibre parfait en sous-jeux (Selten (1975))

Définition :

Un profil de stratégies est un équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux ($EPSJ$) s'il correspond à un équilibre de Nash dans chacun des sous-jeux du jeu considéré. [Backward Induction]

3. Jeux dynamiques
3.1 Modèle de Stackelberg (1934)
3.2 Modèle de Rubinstein (1982)

Heinrich von Stackelberg (1905-1946) économiste allemand

Duopole avec un meneur En_1 et un suiveur En_2

- Les entreprises choisissent les quantités
- $P(Q) = max\{0, a - Q\}$, est la fonction de demande inverse sur le marché avec $Q = q_1 + q_2$. Il n'y a pas de coût fixe et le coût marginal c est constant.
- Le timing (arbre) du jeu :
  - En_1 choisit $q_1 \geq 0$
  - En_2 observe q_1 et choisit $q_2 \geq 0$
  - Le gain de En_i est : $\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c]$

Résolution par induction arrière

Le programme du suiveur pour q_1 donné est :

$$\mathscr{P}_{En_2} \left| \; \underset{\{q_2 \geq 0\}}{\text{Max}} \; \pi_2(q_1, q_2) = q_2[a - q_1 - q_2 - c] \right. \qquad (5)$$

CN1 : $\dfrac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = [a - q_1 - q_2 - c] - q_2 = 0$

CS2 : $\dfrac{\partial^2 \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2^2} = -2 < 0$, vraie

⇒ $MR_2(q_1) = \dfrac{a - q_1 - c}{2}$ si $q_1 < a - c$

⇔ MR dans le modèle de Cournot. Mais ici q_1 est observé, alors qu'avant q_1 était hypothétique

Résolution par induction arrière

Le programme du meneur pour $MR_2(q_1)$ donnée est :

$$\mathscr{P}_{En_1} \left| \; \underset{\{q_1 \geq 0\}}{\text{Max}} \; \pi_1(q_1, MR_2(q_1)) = q_1 \left(a - \frac{a - q_1 - c}{2} - q_1 - c \right) \right. \qquad (6)$$

CN1 : $\dfrac{\partial \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1} = \dfrac{a - 2q_1 - c}{2} = 0$

CS2 : $\dfrac{\partial^2 \pi_1(q_1, q_2)}{\partial q_1^2} = -1 < 0$, vraie

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1^* = \dfrac{a - c}{2}, & si\ a > c \\ MR_2(q_1^*) = q_2^* = \dfrac{a - c}{4}, & si\ a > c \end{cases}$$

Commentaires

- $Q^* = q_1^* + q_2^* = \dfrac{a - c}{2} + \dfrac{a - c}{4} = \dfrac{3(a - c)}{4}$

⇒ $p^* = p(Q^*) = a - Q^* = a - \dfrac{3(a - c)}{4} = \dfrac{a + 3c}{4}$

⇒ $\pi_1(q_1^*, q_2^*) = q_1^*[p(Q^*) - c] = \dfrac{a - c}{2}\left[\dfrac{a + 3c}{4} - c\right] = \dfrac{(a - c)^2}{8}$

⇒ $\pi_2(q_1^*, q_2^*) = q_2^*[p(Q^*) - c] = \dfrac{a - c}{4}\left[\dfrac{a + 3c}{4} - c\right] = \dfrac{(a - c)^2}{16}$

- Comparez avec Cournot

3. Jeux dynamiques
3.1 Modèle de Stackelberg (1934)
3.2 Modèle de Rubinstein (1982)

http://pascal.favard.free.fr/

Marchandage

Voici les étapes, le « timing » du jeu

1. Le joueur 1 propose de partager un euro, s'cts pour lui et $(1-s')$cts pour le joueur 2.
   Soit le joueur 2 accepte et le jeu est fini et les gains sont $(s', 1-s')$, soit il refuse et le jeu continue.
2. Le joueur 2 propose de partager un euro, s''cts pour le joueur 1 et $(1-s'')$cts pour lui.
   Soit le joueur 1 accepte et le jeu est fini et les gains sont $(s'', 1-s'')$, soit il refuse et le jeu continue.
3. Au début de la troisième période le joueur reçoit $s$cts et le joueur 2 reçoit $(1-s)$cts. s est exogène (nature).

Résolution par induction arrière

- Il faut rajouter un coût du temps, actualisation $\rho = \dfrac{1}{1+r} < 1$
- Quelle est la proposition optimale s_2^* de j_2 à la période 2 ?
- En 2 la valeur de s pour j_1 est ρs. Donc j_1 acceptera ssi $s_2 \geq \rho s$
- Donc j_2 doit arbitrer entre $1 - s_2 = 1 - \rho s$ et proposer $s_2 < \rho s$

$\Rightarrow$ Recevoir $1-s$ en 3 et donc en 2, $\rho(1-s)$

- Mais $\rho(1-s) = \rho - \rho s < 1 - \rho s$ puisque $\rho < 1$

$\Rightarrow$ $s_2^* = \rho s$ et j_1 accepte puisqu'il est indifférent

- En 1 j_1 sais que s'il fait une proposition s_1 refusée par j_2 alors il aura en 2, ρs
- j_2 acceptera ssi $1 - s_1 \geq \rho(1 - s_2^*) \Leftrightarrow s_1 \leq 1 - \rho(1 - s_2^*)$
- Donc j_1 doit arbitrer entre avoir en 1, $s_1 = 1 - \rho(1 - s_2^*)$ et avoir en 2, $s_2^* = \rho s$
- Avoir en 2, $s_2^* = \rho s$, c'est avoir en 1, $\rho^2 s$
- Mais $1 - \rho(1 - \rho s) > \rho^2 s \Rightarrow s_1^* = 1 - \rho(1 - \rho s)$
- La solution du jeu est : $\{s_1^*, 1 - s_1^*\} = \{1 - \rho(1 - \rho s), \rho(1 - \rho s)\}$
- Le jeu ne dure qu'une période, que se passerait-il si $\rho = 1$?

1. Introduction
2. Jeux statiques
3. Jeux dynamiques
4. Jeux répétés

- Dilemme du prisonnier : Nash $\neq$ Optimum de Pareto
- En général on joue plusieurs fois le <u>même</u> jeu : interactions de LT
- Mes actions maintenant influencent les actions futures des autres !
- La répétition $\overset{?}{\Rightarrow}$ coopération
- Arrêt coopération = gains à CT $\Rightarrow$ punitions = pertes à LT
- Idée : Répétition $\overset{?}{\Rightarrow}$ Optimum de Pareto

- Quel est l'horizon du jeu ? Horizon connu ?
- Jeux répétés finis : horizon certain Vs incertain
- Jeux répétés infinis
- Les résultats sont très différents entre ces deux types de jeux !
- Dans le cas du dilemme du prisonnier :
  - En temps fini : $EPSJ = (T, T)$
  - En temps infini : l'ensemble des profils EPSJ est immense

Jeu répété

Définition

Soit un jeu sous forme normale à N-joueurs $G = \{S_1, ..., S_N; u_1, ..., u_N\}$, avec N fini et S_i fini pour chaque i. Notons $G(T)$ le jeu répété, appelé aussi superjeu, dans lequel on joue T fois le jeux G. À chaque étape le déroulement passé est connu de tous. Les gains pour $G(T)$ sont la somme des gains à chaque étape.

4. Jeux répétés
4.1 Temps fini et certain sans actualisation
4.2 Temps fini et certain avec actualisation
4.3 Jeux répétés à nombre d'étapes fini et incertain ou infini
4.4 Multiplicité des équilibres
4.5 Coopération dans un duopole : émergence d'un cartel
4.6 Qualité et réputation : arnaque à la qualité ?

http://pascal.favard.free.fr/

Jeu type Dilemme du Prisonnier

J	Joueur 2		
Joueur 1	s	L_2	R_2
	L_1	$(1,1)$	$(5,0)$
	R_1	$(0,5)$	$(4,4)$

Table 1 – étape 1

Calcul des gains sans actualisation en $t = 2$

J	J_2		
J_1	s	L_2	R_2
	L_1	$(2,2)$	$(6,1)$
	R_1	$(1,6)$	$(5,5)$

J	J_2		
J_1	s	L_2	R_2
	L_1	$(6,1)$	$(10,0)$
	R_1	$(5,5)$	$(9,4)$

J	J_2		
J_1	s	L_2	R_2
	L_1	$(1,6)$	$(5,5)$
	R_1	$(0,10)$	$(4,9)$

J	J_2		
J_1	s	L_2	R_2
	L_1	$(5,5)$	$(9,4)$
	R_1	$(4,9)$	$(8,8)$

Table 2 – étape 2

EPSJ

- $EPSJ$ dans le dilemme du prisonnier répété deux fois sans actualisation
- Si on reprend les quatre matrices de gains possibles en seconde période
- Dans chacune il y a un seul équilibre de Nash dans les quatre sous jeux c'est (L_1, L_2)
- Que faire ? ?
- Deux solutions

Calcul des gains sans actualisation en $t = 1$

J	J_2		
J_1	s	(L_2, L_2)	(R_2, L_2)
	(L_1, L_1)	$(2,2)$	$(6,1)$
	(R_1, L_1)	$(1,6)$	$(5,5)$

Table 3 – étape 1

La bonne forme normale générale

J	J_2				
J_1	s	(L_2, L_2)	(L_2, R_2)	(R_2, L_2)	(R_2, R_2)
	(L_1, L_1)	$(2,2)$	$(6,1)$	$(6,1)$	$(10,0)$
	(L_1, R_1)	$(1,6)$	$(5,5)$	$(5,5)$	$(9,4)$
	(R_1, L_1)	$(1,6)$	$(5,5)$	$(5,5)$	$(9,4)$
	(R_1, R_1)	$(0,10)$	$(4,9)$	$(4,9)$	$(8,8)$

Table 4 – étape 2

Un seul EN : $((L_1, L_1), (L_2, L_2))$

Dilemme répété dix fois

- Il y a pour chaque joueur 2^{349525} stratégies pures !
- L'équilibre de Nash à chaque période est unique $EN = (L_1, L_2)$
- À la dernière période aucun joueur n'a intérêt à coopérer sinon il fait 0
- Par induction rétrospective on remonte vers le jeu à la date initiale
- Le seul $EPSJ$ c'est (L_1, L_2) répété dix fois.
- En temps fini, si le jeu de base à un seul EN, l'$EPSJ$ est unique et c'est la répétition de l'EN
- En temps fini et certain, il n'y a pas coopération !

Équilibre de Nash et jeu répété

Proposition

Si G a un seul équilibre de Nash alors, pour T fini, le jeu répété $G(T)$ a un unique équilibre parfait en sous-jeux : l'équilibre de Nash de G est joué T fois.

Équilibre de Nash et jeu répété

Preuve

- Soit $P(n)$ la proposition : L'$EPSJ$ est unique et tel que on joue n fois l'EN
- $P(1)$ est vraie, voir premier chapitre...
- Il faut montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et ceci pour tout n
- On suppose que $P(n)$ est vraie. Les gains sont "translatés" de x_i pour le joueur i
- Alors en $n+1$ c'est l'équilibre non-coopératif qui est Nash. QED

http://pascal.favard.free.fr/

4. Jeux répétés
4.1 Temps fini et certain sans actualisation
4.2 Temps fini et certain avec actualisation
4.3 Jeux répétés à nombre d'étapes fini et incertain ou infini
4.4 Multiplicité des équilibres
4.5 Coopération dans un duopole : émergence d'un cartel
4.6 Qualité et réputation : arnaque à la qualité ?

Rappels

- Préférence pour le présent ⇒ actualisation
- Soit δ le facteur d'actualisation. Si l'agent obtient x dans t périodes il doit obtenir $\delta^t x$ maintenant pour être indifférent entre les deux gains. La préférence pour le présent ⇒ $\delta < 1$
- La valeur actualisée d'une chronique de gains pour $t \in [0, T]$ est :

$$\sum_{t=0}^{T} \delta^t x(t)$$

- $= x \sum_{t=0}^{T} \delta^t = \dfrac{1-\delta^{T+1}}{1-\delta} = \zeta(T)$, si $x(t) = x$ avec

$$lim_{T\to\infty}\zeta(T) = \frac{1}{1-\delta}$$

EPSJ

- $EPSJ$ dans le dilemme du prisonnier répété deux fois avec actualisation
- écrire le jeu sous forme normale
- Montrez qu'il y a seul EN : $((L_1, L_1), (L_2, L_2))$

La forme normale avec actualisation

J		J_2			
	s	(L_2, L_2)	(L_2, R_2)	(R_2, L_2)	(R_2, R_2)
J_1	(L_1, L_1)	$(1+\delta, 1+\delta)$	$(1+5\delta, 1)$	$(5+\delta, \delta)$	$(5+5\delta, 0)$
	(L_1, R_1)	$(1, 1+5\delta)$	$(1+4\delta, 1+4\delta)$	$(5, 5\delta)$	$(5+4\delta, 4\delta)$
	(R_1, L_1)	$(\delta, 5+\delta)$	$(5\delta, 5)$	$(4+\delta, 4+\delta)$	$(4+5\delta, 4)$
	(R_1, R_1)	$(0, 5+5\delta)$	$(4\delta, 5+4\delta)$	$(4, 4+5\delta)$	$(4+4\delta, 4+4\delta)$

Table 5 – étape 2

Un seul EN : $((L_1, L_1), (L_2, L_2))$

Coopération ? ? ?

- Qu'il y ait actualisation ou pas, il n'y a pas coopération
- Expérimentation avec étudiants
- Faits expérimentaux contredisent les résultats précédents
- Pourquoi expérimentalement on se rapproche de l'optimum ?
- Temps finis incertains Vs temps infinis

4. Jeux répétés
4.1 Temps fini et certain sans actualisation
4.2 Temps fini et certain avec actualisation
4.3 Jeux répétés à nombre d'étapes fini et incertain ou infini
4.4 Multiplicité des équilibres
4.5 Coopération dans un duopole : émergence d'un cartel
4.6 Qualité et réputation : arnaque à la qualité ?

Coopération ?

- Chaque joueur sait que la durée du jeu répété est finie mais il ne connaît la date de fin
- S'il ne joue pas la stratégie optimale à court terme c'est qu'il y gagne à long terme
- Cela n'a rien à voir avec de l'altruisme
- Comment mesurer les gains ?

Mesures des gains

- Une façon simple et commode c'est de calculer une moyenne :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} x_i(t)$$

- On peut utiliser l'actualisation avec $\delta_i \in [0, 1]$:

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} \delta_i^t x_i(t)$$

- Si $1-q$ est la proba que le jeu s'arrête à la date t, $q \in [0, 1]$:

$$\mathbb{E}(Gains) = \lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} q^t x_i(t)$$

http://pascal.favard.free.fr/

Revenons au dilemme du prisonnier

- Si le joueur 1 joue R_1 tant que le joueur 2 joue R_2 :
- Si jamais le joueur 2 joue L_2, le joueur 1 joue L_1 indéfiniment :
- Face à cette stratégie du joueur 1, la stratégie optimale du joueur 2 est jouer R_2 et donc gagner 4 indéfiniment. Son gain actualisé/espéré est :

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{t=0}^{T} 4\delta_2^t = \frac{4}{1-\delta_2}$$

- Si initialement le joueur 2 joue L_2, il gagne 5 puis 1 indéfiniment. Son gain actualisé/espéré est :

$$\lim_{T\to\infty} 5 + \sum_{t=1}^{T} \delta_2^t = 5 + \frac{\delta_2}{1-\delta_2}$$

Dévier ou pas ?

- Le joueur 2 ne dévie pas si : $\frac{4}{1-\delta_2} > 5 + \frac{\delta_2}{1-\delta_2}$

$\Leftrightarrow$ $4 > 5(1-\delta_2) + \delta_2$

$\Leftrightarrow$ $4\delta_2 > 1 \Leftrightarrow \delta_2 > \frac{1}{4} = 25\%$

- La stratégie R_1 pour le joueur 1 et sa symétrique pour le joueur 2 (i.e.R_2) sont un équilibre de Nash pour $\delta_i > 25\%$. Avec comme menace du joueur 1, de jouer L_1 indéfiniment si le joueur 2 dévie. Donc pour une préférence pour le présent pas « trop élevée » des deux joueurs.

4. Jeux répétés
4.1 Temps fini et certain sans actualisation
4.2 Temps fini et certain avec actualisation
4.3 Jeux répétés à nombre d'étapes fini et incertain ou infini
4.4 Multiplicité des équilibres
4.5 Coopération dans un duopole : émergence d'un cartel
4.6 Qualité et réputation : arnaque à la qualité ?

Un autre équilibre ?

- L'équilibre de Nash que nous venons d'exhiber est loin d'être le seul !
- Supposons que le joueur 1 annonce la stratégie suivante :
- Il va alterner entre R_1 et L_1 tant que le joueur 2 joue R_2 et si le joueur 2 dévie et joue L_2 alors le joueur 1 jouera L_1 indéfiniment.
- Face à cette stratégie du joueur 1, si le joueur 2 joue R_2 et donc gagner alternativement 4 ou 0 indéfiniment. Son gain actualisé/espéré est : $\frac{4}{1-\delta_2^2}$
- Si initialement le joueur 2 joue L_2, il gagne 5 puis 1 indéfiniment. Son gain actualisé/espéré est : $5 + \frac{\delta_2}{1-\delta_2}$

Dévier ou pas ?

- Le joueur 2 ne dévie pas si : $\frac{4}{1-\delta_2^2} > 5 + \frac{\delta_2}{1-\delta_2}$

$\Leftrightarrow$ $4\delta_2^2 - \delta_2 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow$ $\delta_2 > \frac{1+\sqrt{17}}{8} \simeq 64\%$

- La stratégie R_1 alternativement L_1 pour le joueur 1 et pour le joueur 2 jouer indéfiniment R_2 est un équilibre de Nash pour $\delta_2 > 64\%$. Avec comme menace du joueur 1, de jouer L_1 indéfiniment si le joueur 2 dévie. Il faut donc pour une préférence pour le présent du second joueur « moins grande » que dans l'équilibre (L_1, L_2) ad vitam æternam. Normal non ?

Profusion d'équilibres ?

- Il y « malheureusement » beaucoup d'autres équilibres !
- On peut par exemple supposer que les deux joueurs jouent alternativement leurs deux stratégies.
- Pour avoir un équilibre, le gain espéré de chaque joueur doit être supérieur à $\frac{1}{1-\delta_i}$, ce qui est > 1, puisqu'en jouant L_i à chaque date il gagnera au moins cela.
- De plus l'autre joueur se sert de la stratégie L_j comme menace crédible.
- Donc une chronique d'actions qui donne un gain supérieur à $\frac{1}{1-\delta_i}$ pour tout i peut être soutenue à l'équilibre.

Théorème du folklore

Théorème :
Tout vecteur espéré, de gains réalisables, peut être soutenu à l'équilibre s'il donne à chaque joueur au moins autant que ce qu'il aurait pu s'assurer comme gain si tous les autres joueurs s'étaient ligués contre lui (rationalité individuelle). Ce résultat est connu sous le nom du théorème du folklore.

Théorème du folklore

Théorème :
Tout vecteur espéré, de gains réalisables, peut être soutenu à l'équilibre s'il donne à chaque joueur au moins autant que ce qu'il aurait pu s'assurer comme gain si tous les autres joueurs s'étaient ligués contre lui (rationalité individuelle). Ce résultat est connu sous le nom du théorème du folklore.

$\Rightarrow$ Alors aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement, ce qui est une condition nécessaire de l'équilibre de Nash

http://pascal.favard.free.fr/

Crédibilité des menaces hors équilibre ?

- Y a-t-il un intérêt pour les autres joueurs à punir celui qui a dévié ?
- Cette punition est aussi coûteuse pour ceux qui l'appliquent. Peut-être pas intérêt à l'appliquer.
- $\Rightarrow$ équilibres de Nash pas parfaits en sous-jeux.

Jeu type Nash-Pareto

J	Joueur 2		
	s	L_2	R_2
Joueur 1	L_1	$(5,5)$	$(-1,-2)$
	R_1	$(6,-1)$	$(0,-3)$

Table 6 – étape 1

Jeu type « Nash-Pareto »

- Si le joueur 2 joue L_2 tant que le joueur 1 joue L_1 :
- Si jamais le joueur 1 joue R_1, le joueur 2 joue R_2 indéfiniment :
- Mais le joueur 1 n'aura pas envie de jouer R_1 (δ suffisamment élevé) s'il croit à la menace. Mais il ne peut pas y croire puisqu'en appliquant cette menace le joueur 2 gagne -3 alors qu'en jouant L_2 il gagne -1.
- Le joueur 1 est donc incité à jouer ad vitam R_1, la menace du joueur 2 n'étant pas crédible.
- L'équilibre de Nash proposé n'est donc pas un $EPSJ$ car les menaces qui le soutiennent ne sont pas crédibles.

Fundenberg & Tirole (1986)

- Le « folk theorem » s'applique aussi pour les $EPSJ$.
- Il suffit de modifier les stratégies de punition.
- Les gains du jeu statique étant finis, le gain maximal qu'un joueur fait en déviant est borné.
- Il suffit donc de punir sur un nombre d'étapes fini pour dissuader la déviation.
- Celle-ci terminée on peut revenir à la stratégie d'équilibre et faire comme s'il n'y avait jamais eu de déviation.
- Comme la période de punition est de durée finie son poids est négligeable dans les gains a horizon infini. La menace est crédible !

Revenons au Jeu type « Nash-Pareto »

- Le joueur 2 joue L_2 en première période.
- Ensuite le joueur 2 joue ce que le joueur 1 a joué à la période précédente.
- C'est la stratégie qu'Axelrod a appelée « Tit-for-tat » (donnant-donnant) .
- Tant que δ est proche de 1, on n'a pas besoin d'une punition durable pour soutenir la stratégie de coopération.
- Il y a multiplicité des équilibres mais aussi multiplicité des stratégies de punition...

Théorème (Friedman (1971)) :

Théorème :

Soit G un jeu fini statique en information complète. Soit u^* le vecteur des gains à l'équilibre de Nash de ce jeu. Soit u un vecteur de gains réalisables dans ce jeu δ, le taux d'actualisation commun à tous les joueurs. Si $u_i > u_i^*, \forall i$ et si δ est suffisamment proche de un alors il existe un $EPSJ$ pour G^∞ qui donne u comme vecteur de gains moyens.

Théorème (Friedman (1971)) :

Théorème :

Soit G un jeu fini statique en information complète. Soit u^* le vecteur des gains à l'équilibre de Nash de ce jeu. Soit u un vecteur de gains réalisables dans ce jeu δ, le taux d'actualisation commun à tous les joueurs. Si $u_i > u_i^*, \forall i$ et si δ est suffisamment proche de un alors il existe un $EPSJ$ pour G^∞ qui donne u comme vecteur de gains moyens.

$\Rightarrow$ Tout vecteur de gains qui respecte la rationalité individuelle peut être obtenu grâce à un $EPSJ$.

4. Jeux répétés
4.1 Temps fini et certain sans actualisation
4.2 Temps fini et certain avec actualisation
4.3 Jeux répétés à nombre d'étapes fini et incertain ou infini
4.4 Multiplicité des équilibres
4.5 Coopération dans un duopole : émergence d'un cartel
4.6 Qualité et réputation : arnaque à la qualité ?

http://pascal.favard.free.fr/

- L'objectif du cartel est de maximiser le profit total sur le secteur.

$\Rightarrow$ Max $_{\{q_1,q_2\}}\, \pi(q_1,q_2) = \pi_1(q_1) + \pi_2(q_2)$

$\Leftrightarrow$ Max $_{\{q_1,q_2\}}\, p(Q)Q - c_1(q_1) - c_2(q_2)$

$$CN1 : \frac{\partial \pi(^*)}{\partial q_i} = p(Q) + Q\frac{\partial p(.)}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}c_i(.)}{\mathrm{d}q_i} = 0 \text{ pour } i = 1,2$$

- Chaque entreprise tient compte de son impact sur la baisse de prix pour l'autre entreprise $q_j \dfrac{\partial p(.)}{\partial q_i}$. En s'associant les entreprises atteignent le profit du monopole.

- Soit q_i^{Ca} la production de i dans le cartel et π_i^{Ca} sa part du profit de cartel. Réécrivons la $CN1_i$ du cartel pour q_j^{Ca} fixé :

$$CN1_i \Leftrightarrow p(q_i + q_j^{Ca}) + q_i\frac{\partial p(.)}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}c_i(.)}{\mathrm{d}q_i} = -\frac{\partial p(.)}{\partial q_i}q_j^{Ca}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \pi_i(^*)}{\partial q_i} = -\frac{\partial p(^*)}{\partial q_i}q_j^{Ca}(>0)$$

- Cette solution n'est pas un équilibre non-coopératif $\Rightarrow$ problème de stabilité du cartel. Chaque entreprise a donc intérêt à dévier, à stratégie de l'autre fixée. q_i^{Ca} n'est donc pas sa meilleure réponse à q_j^{Ca}.

- L'équilibre de cartel de ce jeu statique n'est pas un équilibre de Nash. On va déboucher sur une concurrence à la Cournot et donc à des profits plus faibles pour chaque entreprise.

- Il ne peut pas y avoir de coopération « statique », qu'en est-il si le jeu est répété ?

- Considérons l'équilibre les deux entreprises coopèrent dans un jeu répété.

- Les gains actualisés de i sont : $Gains_i^{Ca} = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \pi_i^{Ca}$.

- Si la firme j dévie à l'étape T, elle obtient π_i^d puis indéfiniment π_i^{Co} le profit Cournot. Avec $\pi_i^d > \pi_i^{Co} < \pi_i^{Ca}$.

- Les gains actualisés de j sont : $Gains_j^d = \sum_{t=0}^{T-1} \delta^t \pi_j^{Ca} + \delta^T \pi_j^d + \sum_{t=T+1}^{\infty} \delta^t \pi_j^{Co}$.

- L'entreprise j ne déviera pas si : $Gains_j^{Ca} \geq Gains_j^d$.

$\Leftrightarrow$

$$\sum_0^{T-1} \delta^t \pi_j^{Ca} + \delta^T \pi_j^{Ca} + \sum_{T+1}^{\infty} \delta^t \pi_j^{Ca} \geq \sum_0^{T-1} \delta^t \pi_j^{Ca} + \delta^T \pi_j^d + \sum_{T+1}^{\infty} \delta^t \pi_j^{Co}$$

$\Leftrightarrow$

$$\delta^T \pi_j^{Ca} + \sum_{T-1}^{\infty} \delta^t \pi_j^{Ca} \geq \delta^T \pi_j^d + \sum_{T-1}^{\infty} \delta^t \pi_j^{Co}$$

$\Leftrightarrow \sum_{T+1}^{\infty} \delta^t \left(\pi_j^{Ca} - \pi_j^{Co}\right) \geq \delta^T \left(\pi_j^d - \pi_j^{Ca}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\pi_j^{Ca} - \pi_j^{Co}\right) \sum_{T+1}^{\infty} \delta^t \geq \delta^T \left(\pi_j^d - \pi_j^{Ca}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\pi_j^{Ca} - \pi_j^{Co}\right) \dfrac{\delta\delta^T}{1-\delta} \geq \delta^T \left(\pi_j^d - \pi_j^{Ca}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\pi_j^{Ca} - \pi_j^{Co}\right) \dfrac{\delta}{1-\delta} \geq \left(\pi_j^d - \pi_j^{Ca}\right)$

$\Leftrightarrow$

$$\delta \geq \frac{\pi_j^d - \pi_j^{Ca}}{\pi_j^d - \pi_j^{Co}} < 1,$$

puisque $\pi_j^{Ca} > \pi_j^{Co}$

- La condition précédente est vérifié si δ est suffisamment proche de 1.

- Donc si la firme accorde suffisamment d'importance à ses revenus futurs.

- Pour ne pas dévier il faut valoriser le futur et donc les revenus générés sur le long terme par la coopération.

- La solution de cartel fait donc partie de l'ensemble des équilibres de Nash du jeu répété.

4. Jeux répétés
4.1 Temps fini et certain sans actualisation
4.2 Temps fini et certain avec actualisation
4.3 Jeux répétés à nombre d'étapes fini et incertain ou infini
4.4 Multiplicité des équilibres
4.5 Coopération dans un duopole : émergence d'un cartel
4.6 Qualité et réputation : arnaque à la qualité ?

- Un monopole peut fabriquer un bien de bonne, $\overline{Q}$, ou de mauvaise qualité, $\underline{Q}$.

- Le coût moyen de production est constant et égal à $\overline{c}$ ou à $\underline{c}$, suivant la qualité produite.

- La fonction inverse de demande pour le bien de qualité $\overline{p} = \overline{a} - \overline{Q}$ et pour le bien mauvaise qualité $\underline{p} = \underline{a} - \underline{Q}$. Avec $\overline{a} - \underline{a} > \overline{c} - \underline{c} > 0$.

- Les consommateurs n'observent la qualité du bien qu'après l'avoir acheté, mais calculons, tout d'abord, l'équilibre et les surplus si la qualité est observable ex-ante.

http://pascal.favard.free.fr/

- Le programme du monopole et $\text{Max}_{\{Q\}}\ \pi(Q) = [p(Q) - c]Q$

CN1 : $\dfrac{\mathrm{d}\pi(^*)}{\mathrm{d}Q} = \dfrac{\mathrm{d}p(.)}{\mathrm{d}Q}Q + [p(Q) - c] = -2Q + a - c = 0$

$\Rightarrow Q^M = \dfrac{a-c}{2} \Rightarrow p^M = \dfrac{a+c}{2}$

CS2 : $\dfrac{\mathrm{d}^2\pi(^*)}{\mathrm{d}Q^2} = -2 < 0$

$\Rightarrow \pi\left(Q^M\right) = \pi^M = \left(a - \dfrac{a-c}{2} - c\right)\left(\dfrac{a-c}{2}\right) = \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2$

$\Rightarrow SC^M = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-c}{2}\right)\left(a - \dfrac{a+c}{2}\right) = \dfrac{(a-c)^2}{8} = \dfrac{\pi^M}{2}$

Qualité :	basse		haute
Q^M	$\dfrac{\underline{a}-\underline{c}}{2}$	$<$	$\dfrac{\overline{a}-\overline{c}}{2}$
p^M	$\dfrac{\underline{a}+\underline{c}}{2}$	$<$	$\dfrac{\overline{a}+\overline{c}}{2}$
π^M	$\left(\dfrac{\underline{a}-\underline{c}}{2}\right)^2$	$<$	$\left(\dfrac{\overline{a}-\overline{c}}{2}\right)^2$
SC^M	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\underline{a}-\underline{c}}{2}\right)^2$	$<$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\overline{a}-\overline{c}}{2}\right)^2$

Table 7 – les résultats en information complète

- Socialement produire de la bonne qualité est un optimum de Pareto en information complète
- En information asymétrique si le jeu n'est pas répété : dessinez l'arbre de jeu et trouvez l'équilibre.
- Supposons que le jeu soit répété, les consommateurs sont informés de la qualité du bien vendu précédemment.
- Le monopole maximise sa chronique de profits actualisés au taux δ
- Produire la qualité basse tout le temps est un équilibre mais il y en a d'autres.

- Supposons que les consommateurs adoptent le comportement suivant :
- Si durant les trois dernière périodes le bien a été de bonne qualité alors il sera de bonne qualité sur la période courante.
- Sinon, il sera anticipé comme étant de mauvaise qualité.
- Le monopole peut donc dès la quatrième période obtenir des profits $\overline{SC^M}$
- Calculez le profit si à la date t il dévie une fois puis produit de nouveau de la bonne qualité.

Table des matières (Diapo : 1)

1. Introduction

2. Jeux statiques
2.1 Équilibre de Nash
2.2 Modèle de Cournot (1838)
2.3 Modèle de Bertrand (1883)

3. Jeux dynamiques
3.1 Modèle de Stackelberg (1934)
3.2 Modèle de Rubinstein (1982)

4. Jeux répétés
4.1 Temps fini et certain sans actualisation
4.2 Temps fini et certain avec actualisation
4.3 Jeux répétés à nombre d'étapes fini et incertain ou infini
4.4 Multiplicité des équilibres
4.5 Coopération dans un duopole : émergence d'un cartel

Table des matières (Diapo : 2)

4.6 Qualité et réputation : arnaque à la qualité ?

http://pascal.favard.free.fr/

Jeux et information

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

1er septembre 2016

Les chapitres

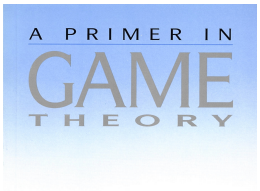
1. Jeux en information complète
2. Jeux en information incomplète
3. Jeux évolutionnaires

Chapitre 2 :

« Jeux en information incomplète »

Vive la lecture !

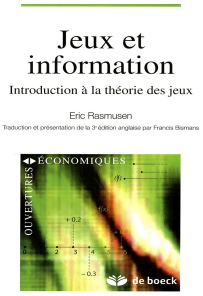
1. « A Primer in Game Theor » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds
2. « Jeux et information » par E. Rasmusen DeBoeck Université Eds
3. « Économie industrielle » par D.W. Carlton et J.M. Perloff DeBoeck Université Eds
4. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



Robert Gibbons

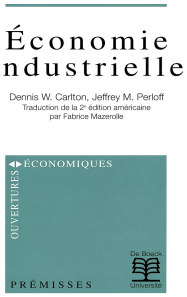
Vive la lecture !

1. « A Primer in Game Theor » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds
2. « Jeux et information » par E. Rasmusen DeBoeck Université Eds
3. « Économie industrielle » par D.W. Carlton et J.M. Perloff DeBoeck Université Eds
4. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



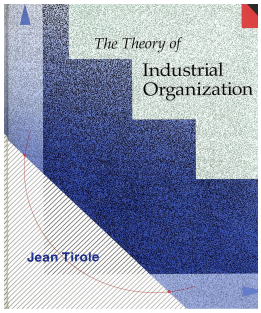
Vive la lecture !

1. « A Primer in Game Theor » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds
2. « Jeux et information » par E. Rasmusen DeBoeck Université Eds
3. « Économie industrielle » par D.W. Carlton et J.M. Perloff DeBoeck Université Eds
4. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



Vive la lecture !

1. « A Primer in Game Theor » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds
2. « Jeux et information » par E. Rasmusen DeBoeck Université Eds
3. « Économie industrielle » par D.W. Carlton et J.M. Perloff DeBoeck Université Eds
4. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



Plan

1. Introduction
2. Jeux statiques
3. Jeux dynamiques

1. Introduction

2. Jeux statiques

3. Jeux dynamiques

Contexte : incomplétude de l'information

Définition :
Un jeu est en information incomplète si tous les joueurs ne connaissent pas parfaitement la structure du jeu.

Contexte : incomplétude de l'information

Définition :
Un jeu est en information incomplète si tous les joueurs ne connaissent pas parfaitement la structure du jeu.

⇒ à stratégies données des autres joueurs, un joueur ne connaît pas ses gains pour chacune de ses stratégies possibles...

1. Les échecs information complète
2. Enchère sous pli cacheté : valeur de réserve des autres enchérisseurs inconnue ⇒ information incomplète
3. Comment réagir de façon rationnelle et quel sera le résultat ? Si l'incomplétude n'est pas « corrigée » alors on ne peut pas résoudre ce type de jeux
4. Intuition : transformer le jeu en information incomplète par un jeu en information imparfaite en introduisant un nouveau joueur : la nature

Deux notions d'équilibres utilisées

1. Équilibre de Nash bayésien
2. Équilibre bayésien parfait

Rappel : Règle de Bayes (Thomas Bayes 1702-1761)

1. Soit A et B deux variables aléatoires discrètes respectivement $a_j, j = \{1, .., J\}$ et $b_i, i = \{1, .., I\}$
2. $\mathbf{p}[B = b_i], i = \{1, .., I\}$, $\mathbf{p}[A = a_j], j = \{1, .., J\}$ et $\mathbf{p}[B = b_i | A = a_j], i = \{1, .., I\}$ et $j = \{1, .., J\}$ les probabilités *a priori*
3. La probabilité *a posteriori* si elle est calculable : $\mathbf{p}[A = a_k | B = b_i] = \frac{\mathbf{p}[B = b_i | A = a_k]\mathbf{p}[A = a_k]}{\sum_j \mathbf{p}[B = b_i | A = a_j]\mathbf{p}[A = a_j]}$

1. Introduction

2. Jeux statiques

3. Jeux dynamiques

Hypothèses

- Les joueurs (agents) jouent simultanément
- Les gains des joueurs dépendent de leurs actions
- Les joueurs sont en information incomplète : ensembles d'information disjoints

http://pascal.favard.free.fr/

2. Jeux statiques
2.1 Équilibre de Nash bayésien (Harsanyi (1967-68))
2.2 Modèle de Cournot avec information incomplète
2.3 Modèle de Bertrand avec information incomplète

Forme normale d'un Jeu bayésien

Définition :

Soit G^b un jeu bayésien (fini) :

$$G^b = \{N, \Theta_i|_{i\in N}, \mathbf{p}_i|_{i\in N}, S_i|_{i\in N}, u_i(\cdot)|_{i\in N}\}$$

- N nombre (fini) de joueurs avec $i = \{1, .., N\}$
- Θ_i ensemble d'information (fini) de i avec $\theta_i \in \Theta_i$
- $\mathbf{p}_i$ loi de probabilité (croyances *a priori*)
- S_i ensemble de stratégies (fini) de i avec $s_i \in S_i$
- u_i fonction d'utilité de i (VNM)

Équilibre de Nash bayésien

Définition :

Profil de stratégies (pures) $s^* = \{s_1^*, .., s_N^*\}$ tel que $\forall i \in \{1, ..., N\}$, $\forall \theta_i \in \Theta_i$; $s_i^*(\theta_i)$ soit solution de :

$$s_i^*(\theta_i) \in \underset{s_i \in S_i}{\text{Arg max}} \sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} \mathbf{p}_i(\theta_{-i}|\theta_i) u_i\left(s_1^*(\theta_1), .., s_{i-1}^*(\theta_{i-1}), s_i, .., s_N^*(\theta_N); \Theta\right)$$

2. Jeux statiques
2.1 Équilibre de Nash bayésien (Harsanyi (1967-68))
2.2 Modèle de Cournot avec information incomplète
2.3 Modèle de Bertrand avec information incomplète

- Soit un bien homogène produit simultanément par deux entreprises (Duopole)
- Soit une demande (inverse) agrégée pour ce bien :

$$P(q_1 + q_2) = max\{a - (q_1 + q_2), 0\}$$

- Supposons que le coût marginal de chaque firme soit constant et qu'il n'y ait pas de coût fixe. Donc $C_i(q_i) = c_i q_i$ et de plus $c_2 \in \{\underline{c}, \overline{c}\}$ et $\underline{c} < c_1 < \overline{c} \leq a$
- Nature : $\mathbf{p}(c_2 = \underline{c}) = 1 - \mathbf{p}(c_2 = \overline{c}) = \mu$

Forme normale

- Deux joueurs : En_1 et En_2
- Information « privée » : $\Theta_1 = \varnothing$ et $\Theta_2 = \{\underline{c}, \overline{c}\}$
- $s_i = q_i \in [0, +\infty[$
- Gains : $\pi_i(q_i, q_j; \theta)$

Fonction de meilleure réponse de En_2

- L'objectif de En_2 est la maximisation du profit :

$$\mathscr{P}_{En_2} \left| \underset{\{q_2\}}{\text{Max}} \ \pi_2(q_2, q_1) = q_2[a - (q_2 + q_1) - c_2] \right. \quad (1)$$

CN1 : $[a - (q_2 + q_1) - c_2] - q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = \dfrac{a - q_1 - c_2}{2}$

CS2 : $-2 \leq 0$ vraie

$$\Rightarrow MR_2(q_1; \underline{c}) = \frac{a - q_1 - \underline{c}}{2} > MR_2(q_1; \overline{c}) = \frac{a - q_1 - \overline{c}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(q_2) = \frac{a - q_1 - \mathbb{E}(c_2)}{2}$$

Fonction de meilleure réponse de En_1

- L'objectif de En_1 est la maximisation de son profit espéré :

$$\mathscr{P}_{En_1} \left| \underset{\{q_1\}}{\text{Max}} \ \mathbb{E}[\pi_1(q_1, q_2)] \right. \quad (2)$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathscr{P}_{En_1} \left| \underset{\{q_1\}}{\text{Max}} \ \mu[q_1[a - (q_1 + q_2(\underline{c})) - c_1]] + (1 - \mu)[q_1[a - (q_1 + q_2(\overline{c})) - c_1]] \right. \quad (3)$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathscr{P}_{En_1} \left| \underset{\{q_1\}}{\text{Max}} \ q_1[a - (q_1 + \mathbb{E}(q_2)) - c_1] \right. \quad (4)$$

http://pascal.favard.free.fr/

Fonction de meilleure réponse de En_1 [suite]

CN1 : $[a-(q_1+\mathbb{E}(q_2))-c_1]-q_1=0 \Rightarrow q_1=\dfrac{a-\mathbb{E}(q_2)-c_1}{2}$

CS2 : $-2\leq 0$ vraie

$$\Rightarrow MR_1(q_2)=\frac{a-\mathbb{E}(q_2)-c_1}{2}$$

L'équilibre bayésien est solution du système :

$$\begin{cases} q_2(\underline{c})=\dfrac{a-q_1-\underline{c}}{2} \\ q_2(\overline{c})=\dfrac{a-q_1-\overline{c}}{2} \\ q_1=\dfrac{a-\mathbb{E}(q_2)-c_1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow EB=\begin{cases} q_1^*=max\left(\dfrac{a-2c_1+\mathbb{E}(c_2)}{3},0\right) \\ q_2^*(\overline{c})=max\left(\dfrac{2a-\mathbb{E}(c_2)+2c_1-3\overline{c}}{6},0\right) \\ q_2^*(\underline{c})=max\left(\dfrac{2a-\mathbb{E}(c_2)+2c_1-3\underline{c}}{6},0\right) \end{cases}$$

L'$EB_{\mathcal{SP}}$ est unique.

Figure 1 – EB dans le modèle de Cournot

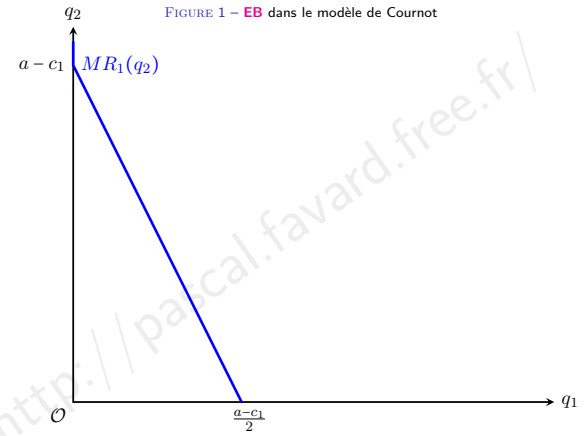


Figure 1 – EB dans le modèle de Cournot

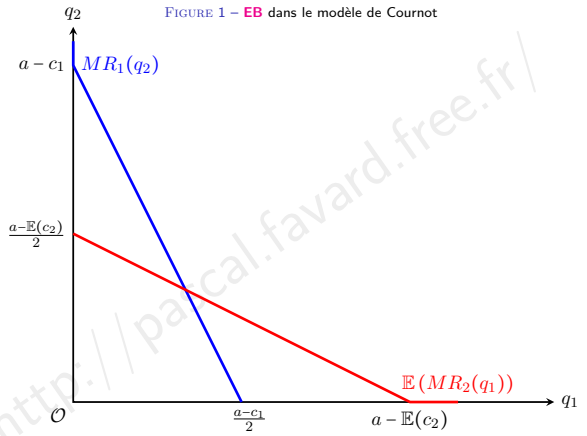


Figure 1 – EB dans le modèle de Cournot

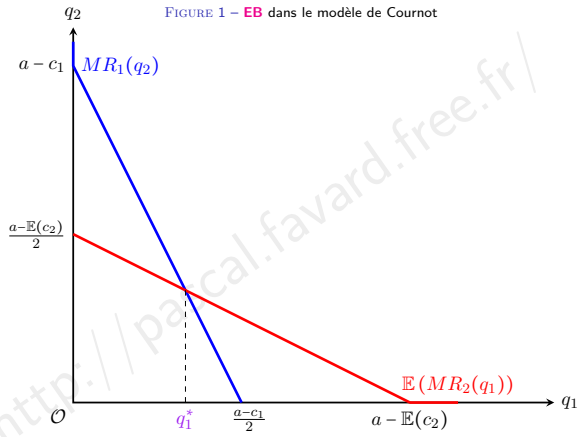


Figure 1 – EB dans le modèle de Cournot

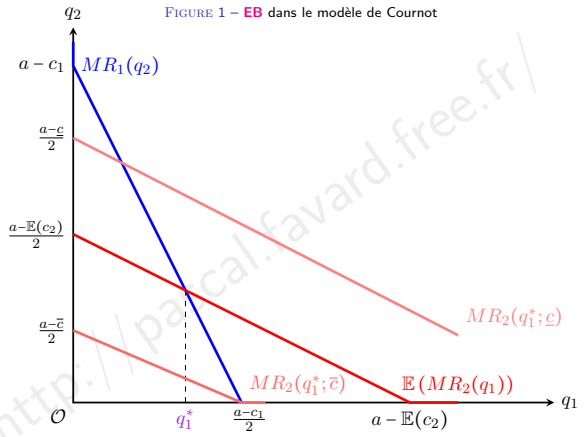


Figure 1 – EB dans le modèle de Cournot

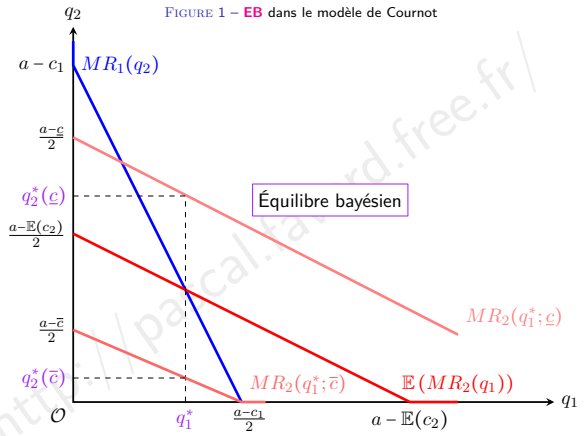
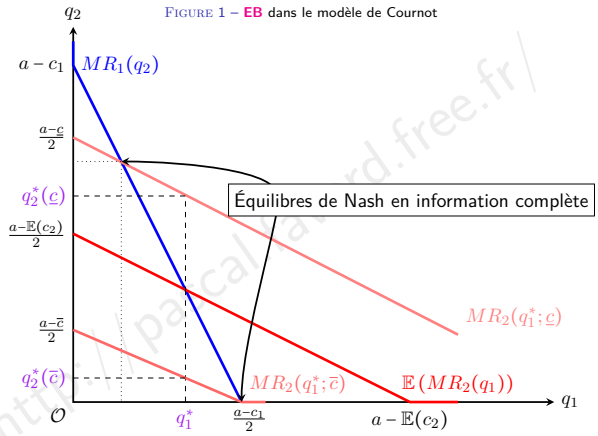


Figure 1 – EB dans le modèle de Cournot



http://pascal.favard.free.fr/

Commentaires

- Imperfection de l'information ⇒ on ne peut pas résoudre les deux jeux séparément
- L'entreprise 2 tient compte que l'entreprise 1 est en information incomplète

⇒ Attention si les coûts ne sont pas linéaire un peu plus difficile

2. Jeux statiques
2.1 Équilibre de Nash bayésien (Harsanyi (1967-68))
2.2 Modèle de Cournot avec information incomplète
2.3 Modèle de Bertrand avec information incomplète

- Soit deux biens différenciés mais substituts, chacun produit par une seule entreprise
- Simultanément chacune des deux entreprises choisit son prix p_i de vente
- $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$ demande pour le bien produit par l'En_i, $b > 0 \Rightarrow$ les deux biens sont substituts
- Supposons que le coût marginal de chaque firme soit constant et qu'il n'y ait pas de coût fixe. Donc $c_i(q_i) = c_i q_i$ et de plus $c_2 \in \{\underline{c}, \overline{c}\}$ et $\underline{c} < c_1 < \overline{c} \leq a$
- $\mathbf{p}(c_2 = \underline{c}) = 1 - \mathbf{p}(c_2 = \overline{c}) = \mu$

Forme normale

- Deux joueurs : En_1 et En_2
- $\Theta_1 = \varnothing$ et $\Theta_2 = \{\underline{c}, \overline{c}\}$
- $s_i = p_i \in [0, +\infty[$
- Gains : $\pi_i(p_i, p_j; \theta)$

Fonction de meilleure réponse de En_2

- L'objectif de En_2 est la maximisation du profit :

$$\mathscr{P}_{En_2} \Big| \ \underset{\{p_2\}}{\text{Max}} \ \pi_2(p_2, p_1) = \underset{\{p_2\}}{\text{Max}} \ [a - p_2 + bp_1][p_2 - c_2] \qquad (5)$$

CN1 : $\dfrac{\partial \pi_2(p_2, p_1)}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1 + c_2 = 0 \Rightarrow MR_2(p_1) = \dfrac{a + bp_1 + c_2}{2}$

$\Rightarrow MR_2(p_1; \underline{c}) < MR_2(p_1; \overline{c})$ et $\mathbb{E}(p_2) = \dfrac{a + bp_1 + \mathbb{E}(c_2)}{2}$

CS2 : $\dfrac{\partial^2 \pi_2(p_2, p_1)}{\partial p_2^2} = -2 \leq 0$ vraie

Fonction de meilleure réponse de En_1

- L'objectif de En_1 est la maximisation du profit :

$$\mathscr{P}_{En_1} \Big| \ \underset{\{p_1\}}{\text{Max}} \ \mathbb{E}(\pi_1(p_1, p_2)) = \underset{\{p_1\}}{\text{Max}} \ [a - p_1 + b\mathbb{E}(p_2)][p_1 - c_1] \qquad (6)$$

CN1 : $\dfrac{\partial \pi_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} = a - 2p_1 + b\mathbb{E}(p_2) + c_1 = 0 \Rightarrow MR_1(p_2) = \dfrac{a + b\mathbb{E}(p_2) + c_1}{2}$

CS2 : $\dfrac{\partial^2 \pi_1(p_1, p_2)}{\partial p_1^2} = -2 \leq 0$ vraie

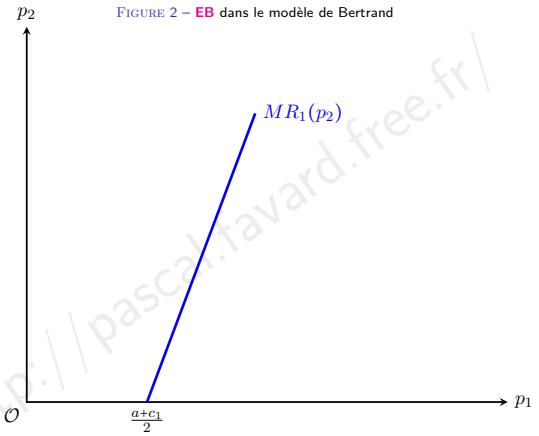
L'équilibre bayésien est solution du système :

$$\begin{cases} p_2(\underline{c}) = \dfrac{a + bp_1 + \underline{c}}{2} \\ p_2(\overline{c}) = \dfrac{a + bp_1 + \overline{c}}{2} \\ p_1 = \dfrac{a + b\mathbb{E}(p_2) + c_1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow EB_{\mathcal{SP}} = \begin{cases} p_1^* = max\left(\dfrac{a(2+b) + b\mathbb{E}(c_2) + 2c_1}{4 - b^2}, 0\right) \text{ avec } b \neq 2 \\ p_2^*(\overline{c}) = max\left(\dfrac{a(4+2b) + b^2\mathbb{E}(c_2) + 2bc_1 + (4-b^2)\overline{c}}{8 - 2b^2}, 0\right) \\ p_2^*(\underline{c}) = max\left(\dfrac{a(4+2b) + b^2\mathbb{E}(c_2) + 2bc_1 + (4-b^2)\underline{c}}{8 - 2b^2}, 0\right) \end{cases}$$

L'$EB_{\mathcal{SP}}$ est unique.

Figure 2 – **EB** dans le modèle de Bertrand



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 2 – EB dans le modèle de Bertrand

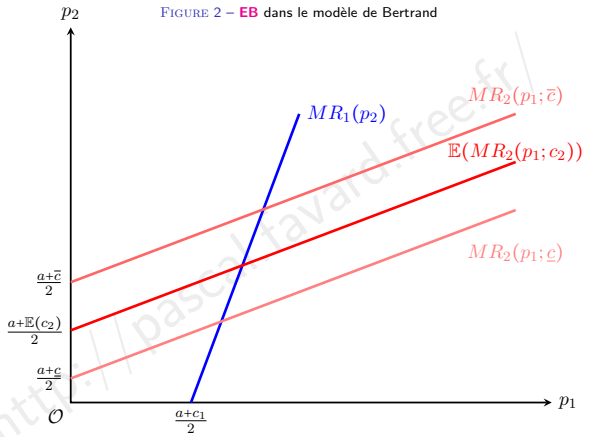


FIGURE 2 – EB dans le modèle de Bertrand

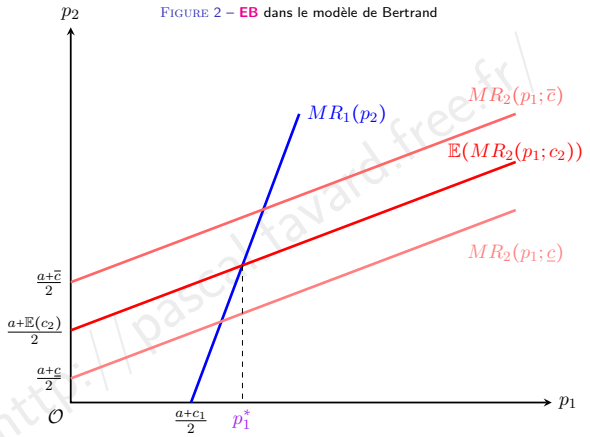


FIGURE 2 – EB dans le modèle de Bertrand

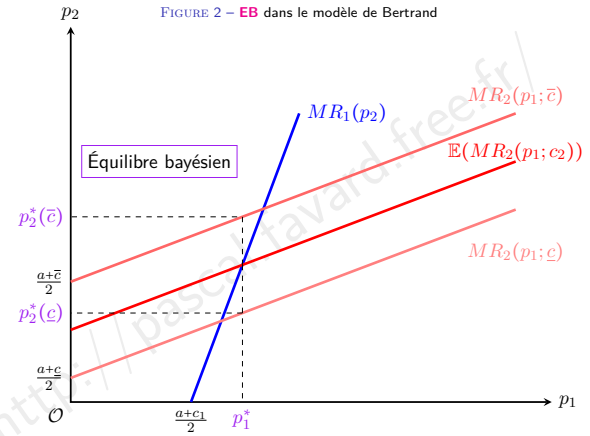
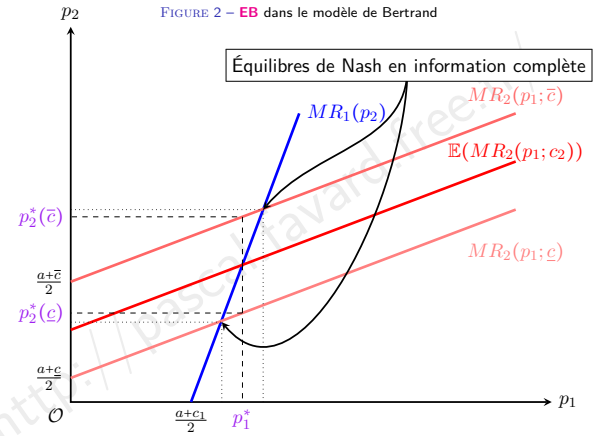


FIGURE 2 – EB dans le modèle de Bertrand



1. Introduction

2. Jeux statiques

3. Jeux dynamiques

Hypothèses

- Les joueurs (agents) jouent séquentiellement
- Les gains des joueurs dépendent de leurs actions
- Les joueurs sont en information incomplète

Les différents types de jeux dynamiques

- Le joueur informé joue en premier : jeux de signaux (signaling games)
- Le joueur informé joue en second :
  1. jeux de filtrage (screening games)
  2. modèle principal-agent (moral hazard & adverse selection)

3. Jeux dynamiques
3.1 Jeu de signaux
3.2 Jeu de l'entrée
3.3 Modèle de Stackelberg avec information incomplète
3.4 Raffinements

http://pascal.favard.free.fr/

Exemple : Jeux à deux joueurs

- Le joueur informé joue en premier
- Le joueur non-informé joue en second

+ « Nature » au début du jeu ⇒ étape supplémentaire

⇒ Le joueur en second ne connait pas l'histoire

Donc Information incomplète $\overset{Nature}{\Rightarrow}$ Information imparfaite

Forme normale d'un jeu bayésien séquentiel

Définition :

Soit G^b un jeu bayésien (fini) :

$$G^b = \{N = 2, \mathbf{p}, \mathbf{p}_2(\theta_1|s_1), (S_i)|_{i\in N}, (\Theta_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\}$$

- 2 joueurs
- $\mathbf{p}$ probabilité *a priori*
- $\mathbf{p}_2$ probabilité *a posteriori*
- S_i ensemble de stratégies (fini) de i avec $s_i \in S_i$
- Θ_1 ensemble d'information (fini) de 1 avec $\theta_1 \in \Theta_1$
- u_i fonction d'utilité de i (VNM)

Équilibre Bayésien Parfait

Définition :

Profil de stratégies $s^* = \{s_1^*, s_2^*, \mathbf{p}_2\}$ solution de :

1. $\forall s_1 \in S_1\ ; s_2^*(s_1) \in \underset{s_2\in S_2}{\text{Arg max}} \sum_{\theta_1\in\Theta_1} \mathbf{p}_2(\theta_1|s_1) u_2(s_1, s_2, \theta_1)$
2. $\forall \theta_1 \in \Theta_1\ ; s_1^*(\theta_1) \in \underset{s_1\in S_1}{\text{Arg max}}\ u_1(s_1, s_2^*(s_1), \theta_1)$

Les différents types d'équilibres

Définition : EBP séparateur « separating »

Les stratégies du joueur 1 révèlent parfaitement son information « privée ».

Les différents types d'équilibres

Définition : EBP séparateur « separating »

Les stratégies du joueur 1 révèlent parfaitement son information « privée ».

Définition : EBP mélangeant « pooling »

Les *a posteriori* du joueur 2 sont identiques à ses *a priori*. Les stratégies du joueur 1 ne révèlent rien sur son information « privée ».

Les différents types d'équilibres

Définition : EBP séparateur « separating »

Les stratégies du joueur 1 révèlent parfaitement son information « privée ».

Définition : EBP mélangeant « pooling »

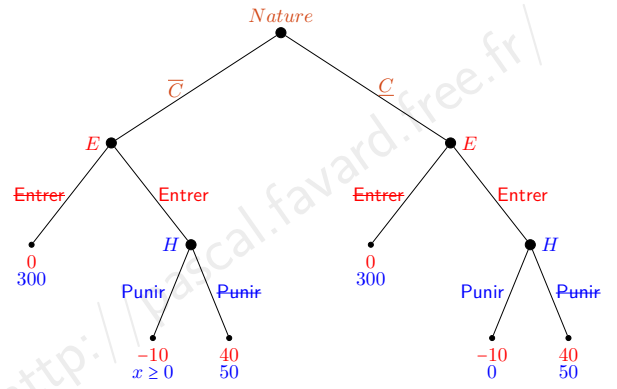
Les *a posteriori* du joueur 2 sont identiques à ses *a priori*. Les stratégies du joueur 1 ne révèlent rien sur son information « privée ».

Définition : EBP semi-séparateur

Certaines stratégies du joueur 1 révèlent parfaitement son information « privée », les autres pas. C'est donc une révélation partielle de l'information.

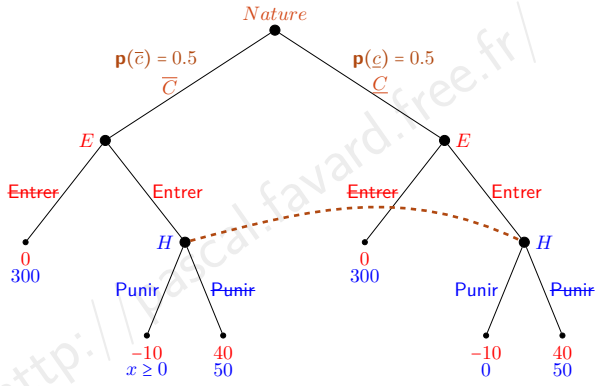
3. Jeux dynamiques
3.1 Jeu de signaux
3.2 Jeu de l'entrée
3.3 Modèle de Stackelberg avec information incomplète
3.4 Raffinements

Figure 3 – Arbre de jeu : Si tu rentres je te...



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 3 – Arbre de jeu : Si tu rentres je te...



Équilibres séparateurs potentiels

- Équilibres séparateurs avec *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$ $\Rightarrow$ *a posteriori* : $\mathbf{p}(\overline{C}|Entre) = \mathbf{p}(\underline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = 1$
- Équilibres séparateurs avec *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 0$ $\Rightarrow$ *a posteriori* : $\mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = \mathbf{p}(\underline{C}|Entre) = 1$

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 2 : JEUX EN INFORMATION INCOMPLÈTE 01-09-2016 41/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 2 : JEUX EN INFORMATION INCOMPLÈTE 01-09-2016 41/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 2 : JEUX EN INFORMATION INCOMPLÈTE 01-09-2016 41/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 2 : JEUX EN INFORMATION INCOMPLÈTE 01-09-2016 41/74

Équilibres séparateurs potentiels

- Équilibres séparateurs avec *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$ $\Rightarrow$ *a posteriori* : $\mathbf{p}(\overline{C}|Entre) = \dfrac{\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C})\mathbf{p}(\overline{C})}{\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C})\mathbf{p}(\overline{C}) + \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C})\mathbf{p}(\underline{C})} = 1$
- Équilibres séparateurs avec *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 0$ $\Rightarrow$ *a posteriori* : $\mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = \mathbf{p}(\underline{C}|Entre) = 1$

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 2 : JEUX EN INFORMATION INCOMPLÈTE 01-09-2016 41/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 2 : JEUX EN INFORMATION INCOMPLÈTE 01-09-2016 41/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 2 : JEUX EN INFORMATION INCOMPLÈTE 01-09-2016 41/74

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entre}) = \alpha(x-50)+50 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ si } x < 50, \alpha = 1 \text{ si } x > 50, \alpha \in [0,1] \text{ sinon})$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = \alpha(-10)+(1-\alpha)40 = -50\alpha+40 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C})$ $0 \text{ si } \alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > -50\alpha + 40 \text{ si } \alpha > \frac{4}{5}$ contradiction

http://pascal.favard.free.fr/

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 50 > 0$ donc il punit pas
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = 40 > 0$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = 40$ contradiction

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 50 > 0$ donc il punit pas
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = 40 > 0$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = 40$ contradiction

© Pr. Favard (*Univ. de Tours*) Chapitre 2 : Jeux en information incomplète 01-09-2016 42/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 50 > 0$ donc il punit pas
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = 40 > 0$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = 40$ contradiction

© Pr. Favard (*Univ. de Tours*) Chapitre 2 : Jeux en information incomplète 01-09-2016 42/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 50 > 0$ donc il punit pas
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = 40 > 0$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = 40$ contradiction

© Pr. Favard (*Univ. de Tours*) Chapitre 2 : Jeux en information incomplète 01-09-2016 42/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 50 > 0$ donc il punit pas
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = 40 > 0$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = 40$ contradiction

© Pr. Favard (*Univ. de Tours*) Chapitre 2 : Jeux en information incomplète 01-09-2016 42/74

Jeux dynamiques | Jeu de l'entrée

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 0$

- Gains de H
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 50 > 0$ donc il punit pas
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$
- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = 40 > 0$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = 40$ contradiction

© Pr. Favard (*Univ. de Tours*) Chapitre 2 : Jeux en information incomplète 01-09-2016 42/74

Équilibres séparateurs : le bilan

Dans notre exemple il n'existe pas d'équilibre séparateur

Équilibres mélangeants potentiels

1. Avec *a priori* : $\begin{cases} \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1 \\ \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 0 \end{cases}$

   Entre *a posteriori* : $\mathbf{p}(\underline{C}|\text{Entre}) = \mathbf{p}(\overline{C}|\text{Entre}) = 0.5$

   ~~Entre~~ *a posteriori* : $\mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = \beta = 1 - \mathbf{p}(\underline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = ?$ car ~~Bayes~~

2. Avec *a priori* : $\begin{cases} \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 0 \\ \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1 \end{cases}$

   Entre *a posteriori* : $\mathbf{p}(\underline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = \mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = 0.5$

   ~~Entre~~ *a posteriori* : $\mathbf{p}(\overline{C}|\text{Entre}) = \beta = 1 - \mathbf{p}(\underline{C}|\text{Entre}) = ?$

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

  Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 0.5(\alpha(x - 100) + 100)$
  1. $x - 100 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
  2. $x - 100 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
  3. $x = 100 \Rightarrow \alpha \in [0, 1]$ donc H joue en stratégies mixtes

  ~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

- Gains de E
  1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
  2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $x < 100$ ou si $x = 100$ et $\alpha < \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

http://pascal.favard.free.fr/

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 0.5(\alpha x + (1-\alpha)50) + 0.5(\alpha 0 + (1-\alpha)50) = 0.5(\alpha(x-100)+100)$

1. $x - 100 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $x - 100 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $x = 100 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $x < 100$ ou si $x = 100$ et $\alpha < \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 0.5(\alpha(x-100)+100)$

1. $x - 100 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $x - 100 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $x = 100 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $x < 100$ ou si $x = 100$ et $\alpha < \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 0.5(\alpha(x-100)+100)$

1. $x - 100 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $x - 100 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $x = 100 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $x < 100$ ou si $x = 100$ et $\alpha < \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 0.5(\alpha(x-100)+100)$

1. $x - 100 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $x - 100 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $x = 100 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = \beta 300 + (1-\beta)300 = 300$

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $x < 100$ ou si $x = 100$ et $\alpha < \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 0.5(\alpha(x-100)+100)$

1. $x - 100 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $x - 100 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $x = 100 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $x < 100$ ou si $x = 100$ et $\alpha < \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 0.5(\alpha(x-100)+100)$

1. $x - 100 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $x - 100 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $x = 100 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $x < 100$ ou si $x = 100$ et $\alpha < \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = 0.5(\alpha(x-100)+100)$

1. $x - 100 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $x - 100 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $x = 100 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 > 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $x < 100$ ou si $x = 100$ et $\alpha < \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

http://pascal.favard.free.fr/

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha(\beta x - 50) + 50$

1. $\beta x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\beta x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\beta x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $\beta x > 50$ ou si $\beta x = 50$ et $\alpha > \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 0.5 * 300 + 0.5 * 300 = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha(\beta x - 50) + 50$

1. $\beta x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\beta x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\beta x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $\beta x > 50$ ou si $\beta x = 50$ et $\alpha > \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \beta(\alpha x + (1-\alpha)50) + (1-\beta)(\alpha 0 + (1-\alpha)50) = \alpha(\beta x - 50) + 50$

1. $\beta x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\beta x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\beta x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $\beta x > 50$ ou si $\beta x = 50$ et $\alpha > \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha(\beta x - 50) + 50$

1. $\beta x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\beta x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\beta x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $\beta x > 50$ ou si $\beta x = 50$ et $\alpha > \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha(\beta x - 50) + 50$

1. $\beta x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\beta x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\beta x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $\beta x > 50$ ou si $\beta x = 50$ et $\alpha > \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha(\beta x - 50) + 50$

1. $\beta x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\beta x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\beta x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $\beta x > 50$ ou si $\beta x = 50$ et $\alpha > \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha(\beta x - 50) + 50$

1. $\beta x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\beta x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\beta x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = (-50\alpha + 40)[\beta + (1-\beta)]$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $\beta x > 50$ ou si $\beta x = 50$ et $\alpha > \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

http://pascal.favard.free.fr/

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$

- Gains de H

$\cancel{\text{Entre}}$ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha(\beta x - 50) + 50$

1. $\beta x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\beta x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\beta x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}};\underline{C}) > (-50\alpha + 40)$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}};\overline{C}) = 0 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer};\overline{C}) = (-50\alpha+40)[\beta+(1-\beta)]$ si $\alpha > \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ Si $\beta x > 50$ ou si $\beta x = 50$ et $\alpha > \frac{4}{5}$ alors une infinité d'équilibres

Équilibres mélangeant : le bilan

1. $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1$ et $\beta = \mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}})$

$x < 100$: E entre et H ~~punit~~ (pas de condition sur β i.e. $\beta \in [0,1]$)

$x = 100$: E entre et H joue en stratégie mixte $\alpha < \frac{4}{5}$ (pas de condition sur β)

2. $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1$ et $\beta = \mathbf{p}(\overline{C}|\text{Entre})$

$x > 50$: E n'entre pas et H punit et $\beta \in]\frac{50}{x}, 1]$

$x \geq 50$: E n'entre pas et H joue en stratégie mixte $\alpha > \frac{4}{5}$ et $\beta = \frac{50}{x}$

Équilibres semi-séparateurs potentiels avec $\theta \in]0,1[$

1. Avec *a priori* : $[\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1 - \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = \theta]$

$\overset{\text{a posteriori}}{\Rightarrow}$ $[\mathbf{p}(\underline{C}|\text{Entre}) = \frac{1}{1+\theta}, \mathbf{p}(\underline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = 0; \mathbf{p}(\overline{C}|\text{Entre}) = \frac{\theta}{1+\theta}, \mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = 1]$

2. Avec *a priori* : $[\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1 - \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = \theta]$

$\overset{\text{a posteriori}}{\Rightarrow}$ $[\mathbf{p}(\underline{C}|\text{Entre}) = 0, \mathbf{p}(\underline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = \frac{1}{2-\theta}; \mathbf{p}(\overline{C}|\text{Entre}) = 1, \mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = \frac{1-\theta}{2-\theta}]$

3. Avec *a priori* : $[\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1 - \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \theta]$

$\overset{\text{a posteriori}}{\Rightarrow}$ $[\mathbf{p}(\underline{C}|\text{Entre}) = \frac{\theta}{1+\theta}, \mathbf{p}(\underline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = 1; \mathbf{p}(\overline{C}|\text{Entre}) = \frac{1}{1+\theta}, \mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = 0]$

4. Avec *a priori* : $[\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1 - \mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\underline{C}) = \theta]$

$\overset{\text{a posteriori}}{\Rightarrow}$ $[\mathbf{p}(\underline{C}|\text{Entre}) = 1, \mathbf{p}(\underline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = \frac{1-\theta}{2-\theta}; \mathbf{p}(\overline{C}|\text{Entre}) = 0, \mathbf{p}(\overline{C}|\cancel{\text{Entre}}) = \frac{1}{2-\theta}]$

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

$\cancel{\text{Entre}}$ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{\theta x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer};\underline{C}) = -50\alpha + 40 \overset{\text{a priori}}{>} \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}};\underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E;\overline{C}) \overset{\text{a priori}}{=}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre mélangeant avec ces a priori

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

$\cancel{\text{Entre}}$ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{\theta x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer};\underline{C}) = -50\alpha + 40 \overset{\text{a priori}}{>} \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}};\underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E;\overline{C}) \overset{\text{a priori}}{=}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre mélangeant avec ces a priori

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

$\cancel{\text{Entre}}$ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{\theta x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer};\underline{C}) = -50\alpha + 40 \overset{\text{a priori}}{>} \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}};\underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E;\overline{C}) \overset{\text{a priori}}{=}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre mélangeant avec ces a priori

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

$\cancel{\text{Entre}}$ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{\theta x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer};\underline{C}) = -50\alpha + 40 \overset{\text{a priori}}{>} \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}};\underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E;\overline{C}) \overset{\text{a priori}}{=}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre mélangeant avec ces a priori

http://pascal.favard.free.fr/

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{\theta x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 \overset{a\ priori}{>} \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E; \overline{C}) \overset{a\ priori}{=}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre mélangeant avec ces a priori

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{\theta x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 \overset{a\ priori}{>} \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E; \overline{C}) \overset{a\ priori}{=}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre mélangeant avec ces a priori

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{\theta x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 \overset{a\ priori}{>} \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E; \overline{C}) \overset{a\ priori}{=} (1-\theta)\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) + \theta\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C})$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre mélangeant avec ces a priori

1. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{\theta x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{\theta x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 \overset{a\ priori}{>} \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E; \overline{C}) \overset{a\ priori}{=} (1-\theta)(-50\alpha + 40)$, $\theta \neq 0$ ssi $\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre mélangeant avec ces a priori

2. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = 0; \mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = \theta$

- Gains de H

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha(x - 50) + 50$

1. $x - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $x - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $x = 50 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40 < \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0$ si $\alpha > \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0 = \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40$ si $\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre avec ces a priori

3. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \theta$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 = \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40$ si $\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre avec ces a priori

3. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \theta$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \alpha\left[\frac{x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 = \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40$ si $\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre avec ces a priori

http://pascal.favard.free.fr/

3. *a priori* : $\mathbf{p}(\text{Entre}|\overline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \theta$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = \frac{\theta}{1+\theta}[50(1-\alpha)] + \frac{1}{1+\theta}[\alpha x + 50(1-\alpha)] = \alpha\left[\frac{x}{1+\theta} - 50\right] + 50$

1. $\frac{x}{1+\theta} - 50 < 0 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas
2. $\frac{x}{1+\theta} - 50 > 0 \Rightarrow \alpha = 1$ donc H punit
3. $\frac{x}{1+\theta} - 50 = 0 \Rightarrow \alpha \in [0,1]$ donc H joue en stratégies mixtes

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = -50\alpha + 40 > \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0$ si $\alpha < \frac{4}{5}$
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 = \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = -50\alpha + 40$ si $\alpha = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre avec ces a priori

4. *a priori* : $\mathbf{p}(\cancel{\text{Entre}}|\overline{C}) = 1; \mathbf{p}(\text{Entre}|\underline{C}) = \theta$

- Gains de H

~~Entre~~ $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\cancel{\text{Entrer}}) = 300$

Entre $\mathbb{E}(\text{Gains de } H|\text{Entrer}) = -50\alpha + 50 \Rightarrow \alpha = 0$ donc H ne punit pas

- Gains de E

1. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \overline{C}) = 40 < \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \overline{C}) = 0$ impossible
2. $\mathbb{E}(\text{Gains de } E|\cancel{\text{Entrer}}; \underline{C}) = 0 \neq \mathbb{E}(\text{Gains de } E|\text{Entrer}; \underline{C}) = 40$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre avec ces a priori

Équilibres semi-séparateurs : le bilan

Il n'existe pas d'équilibre semi-séparateur dans ce jeu

3. Jeux dynamiques
3.1 Jeu de signaux
3.2 Jeu de l'entrée
3.3 Modèle de Stackelberg avec information incomplète
3.4 Raffinements

- $P(Q) = a - Q$, est la fonction de demande inverse sur le marché avec $Q = q_1 + q_2$. Les coûts de production sont nuls.
- Duopole avec un meneur En_1 et un suiveur En_2
- Les entreprises choisissent les quantités
- Le timing (arbre) du jeu :

1. « Nature » choisit si la disposition maximale à payer, notée a, est faible $\underline{a}$ ou élevée $\overline{a}$, avec $\underline{a} < \overline{a} < \frac{3\underline{a}}{2}$
2. En_1 choisit $q_1 \geq 0$
3. En_2 observe q_1 mais pas a et choisit $q_2 \geq 0$
4. Le gain de En_i est : $\pi_i(q_i, q_j) = P(Q)q_i$

Équilibres séparateurs

- $q_1(\underline{a}) \neq q_1(\overline{a}) > 0$
- $\eta(\underline{a}|q_1(\underline{a})) = 1$
- $\eta(\overline{a}|q_1(\overline{a})) = 1$
- $\forall q_1 \in \mathbb{R}_+^* - \{q_1(\underline{a}), q_1(\overline{a})\}$ on a : $\eta(\overline{a}|q_1) = 1$

Le programme du suiveur est :

$$\mathscr{P}_{En_2} \left| \max_{\{q_2 \geq 0\}} \pi_2(q_1, q_2) = q_2[a - q_1 - q_2] \right. \quad (7)$$

CN1 : $\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = [a - q_1 - q_2] - q_2 = 0 \Rightarrow q_2(q_1) = \frac{a - q_1}{2}$ si $q_1 < a$

CS2 : $\frac{\partial^2 \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2^2} = -2 < 0$, vraie

$\Rightarrow q_2(q_1(\underline{a})) = max\left\{0, \frac{\underline{a} - q_1(\underline{a})}{2}\right\}$

et $q_2(q_1(\overline{a})) = max\left\{0, \frac{\overline{a} - q_1(\overline{a})}{2}\right\}$

sinon $q_2(q_1) = max\left\{0, \frac{\overline{a} - q_1}{2}\right\}$

Si $\overline{a}$, le programme du meneur est :

$$\mathscr{P}_{En_1} \left| \max_{\{q_1 \geq 0\}} \pi_1(q_1|\overline{a}) = q_1\left(\overline{a} - q_1 - \frac{\overline{a} - q_1}{2}\right) = q_1\left(\frac{\overline{a} - q_1}{2}\right) \right. \quad (8)$$

CN1 : $\frac{\partial \pi_1(\cdot)}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow q_1(\overline{a}) = q_1^* = \frac{\overline{a}}{2} < \overline{a}$

CS2 : $\frac{\partial^2 \pi_1(\cdot)}{\partial q_1^2} = -1 < 0$, vraie

$\Rightarrow \pi_1(q_1(\overline{a})|\overline{a}) = \frac{\overline{a}^2}{8}$

http://pascal.favard.free.fr/

Si $\overline{a}$, Non déviation

$$\pi_1(q_1(\overline{a})|\overline{a}) = \frac{\overline{a}^2}{8} \geq \pi_1(q_1(\underline{a})|\overline{a}) = q_1(\underline{a})\left[\overline{a} - q_1(\underline{a}) - \frac{\underline{a} - q_1(\underline{a})}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{a}^2}{8} \geq q_1(\underline{a})\left[\frac{2\overline{a} - \underline{a} - q_1(\underline{a})}{2}\right] \Rightarrow q_1^2(\underline{a}) - (2\overline{a} - \underline{a})q_1(\underline{a}) + \frac{\overline{a}^2}{4} \geq 0$$

Or $\Delta = (2\overline{a} - \underline{a})^2 - \overline{a}^2 > 0$, ce polynôme admet donc deux racines réelles :

$$q_{11}(\underline{a}) = \frac{2\overline{a} - \underline{a} - \sqrt{(2\overline{a} - \underline{a})^2 - \overline{a}^2}}{2} > 0 \text{ et } q_{12}(\underline{a}) = \frac{2\overline{a} - \underline{a} + \sqrt{(2\overline{a} - \underline{a})^2 - \overline{a}^2}}{2} > q_{11}(\underline{a})$$

- L'inégalité est vérifiée si : $q_1(\underline{a}) \in \mathbb{R}_+^* - [q_{11}, q_{12}]$

Si $\underline{a}$, Non déviation

$$\forall q_1 > 0,\ \pi_1(q_1(\underline{a})|\underline{a}) \geq \pi_1(q_1|\underline{a})$$

$$\Rightarrow \forall q_1 > 0,\ q_1(\underline{a})\left[\underline{a} - q_1(\underline{a}) - \frac{\underline{a} - q_1(\underline{a})}{2}\right] \geq q_1\left[\underline{a} - q_1 - \frac{\overline{a} - q_1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \forall q_1 > 0,\ q_1(\underline{a})\left[\frac{\underline{a} - q_1(\underline{a})}{2}\right] \geq q_1\left[\frac{2\underline{a} - \overline{a} - q_1}{2}\right]$$

La borne supérieure de $q_1\left[\frac{2\underline{a} - \overline{a} - q_1}{2}\right]$ est atteinte pour $q_1 = \frac{2\underline{a} - \overline{a}}{2}$ et elle est donc égale à : $\frac{(2\underline{a} - \overline{a})^2}{8}$

Si $\underline{a}$, Non déviation [suite]

L'inégalité se réécrit :

$$\Rightarrow q_1(\underline{a})\left[\frac{\underline{a} - q_1(\underline{a})}{2}\right] \geq \frac{(2\underline{a} - \overline{a})^2}{8}$$

$$\Rightarrow -q_1^2(\underline{a}) + \underline{a}q_1(\underline{a}) - \frac{(2\underline{a} - \overline{a})^2}{4} \geq 0$$

Or $\Delta = \underline{a}^2 - (2\underline{a} - \overline{a})^2 > 0$, ce polynôme admet donc deux racines réelles :

$$q_{13}(\underline{a}) = \frac{\underline{a} - \sqrt{\underline{a}^2 - (2\underline{a} - \overline{a})^2}}{2} > 0 \text{ et } q_{14}(\underline{a}) = \frac{\underline{a} + \sqrt{\underline{a}^2 - (2\underline{a} - \overline{a})^2}}{2} > q_{13}(\underline{a})$$

- L'inégalité est vérifiée si : $q_1(\underline{a}) \in [q_{13}, q_{14}]$

Les équilibres séparateurs sont de la forme :

- Or $q_{14} < q_{12}$
- Il y aura des équilibres séparateurs si $q_{13} < q_{11}$
- $\begin{cases} \nexists q_1(\underline{a}) \in \mathbb{R}_+ \text{ si } q_{13} > q_{11} \\ q_1(\underline{a}) \in [q_{13}, q_{14}] \text{ si } q_{14} < q_{11} \text{ , notons que : } \frac{\underline{a}}{2} \in [q_{13}, q_{14}] \\ q_1(\underline{a}) \in [q_{13}, q_{11}] \text{ si } q_{13} < q_{11} < q_{14} \end{cases}$

Équilibres mélangeants

- $q_1(\underline{a}) = q_1(\overline{a}) = \tilde{q}_1 > 0$
- $\mathbf{p}(\underline{a}|\tilde{q}_1) = \eta = 1 - \mathbf{p}(\overline{a}|\tilde{q}_1)$
- $\forall q_1 \in \mathbb{R}_+^* - \{\tilde{q}_1\}$ on a : $\mathbf{p}(\underline{a}|q_1) = \nu = 1 - \mathbf{p}(\overline{a}|q_1)$

avec : $\eta > \nu \Rightarrow \mathbb{E}^\eta[a] = \eta\underline{a} + (1-\eta)\overline{a} < \mathbb{E}^\nu[a] = \nu\underline{a} + (1-\nu)\overline{a}$

Le programme du suiveur est :

$$\mathscr{P}_{En_2} \left| \ \underset{\{q_2 \geq 0\}}{\text{Max}}\ \mathbb{E}\left[\pi_2(\tilde{q}_1, q_2)\right] = q_2[\mathbb{E}[a] - \tilde{q}_1 - q_2] \right. \tag{9}$$

CN1 : $\frac{\partial \mathbb{E}\left[\pi_2(\tilde{q}_1, q_2)\right]}{\partial q_2} = [\mathbb{E}[a] - \tilde{q}_1 - q_2] - q_2 = 0$

CS2 : $\frac{\partial^2 \mathbb{E}\left[\pi_2(\tilde{q}_1, q_2)\right]}{\partial q_2^2} = -2 < 0$, vraie

$$\Rightarrow \begin{cases} q_2(\tilde{q}_1) = max\left\{0, \frac{\mathbb{E}^\eta[a] - \tilde{q}_1}{2}\right\} \\ q_2(q_1) = max\left\{0, \frac{\mathbb{E}^\nu[a] - q_1}{2}\right\} \end{cases}$$

Non déviation du meneur si :

- $\forall q_1 \in \mathbb{R}_+^* - \{\tilde{q}_1\}$ on a : $\begin{cases} \pi_1(\tilde{q}_1|\overline{a}) \geq \pi_1(q_1|\overline{a}) \\ \pi_1(\tilde{q}_1|\underline{a}) \geq \pi_1(q_1|\underline{a}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \forall q_1 \in \mathbb{R}_+^* - \{\tilde{q}_1\} \text{ on a : } \begin{cases} \tilde{q}_1\left[\frac{2\overline{a} - \mathbb{E}^\eta[a] - \tilde{q}_1}{2}\right] \geq q_1\left[\frac{2\overline{a} - \mathbb{E}^\nu[a] - q_1}{2}\right] \\ \tilde{q}_1\left[\frac{2\underline{a} - \mathbb{E}^\eta[a] - \tilde{q}_1}{2}\right] \geq q_1\left[\frac{2\underline{a} - \mathbb{E}^\nu[a] - q_1}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{q}_1\left[2\overline{a} - \mathbb{E}^\eta[a] - \tilde{q}_1\right] \geq \left[\frac{2\overline{a} - \mathbb{E}^\nu[a]}{2}\right]^2 \\ \tilde{q}_1\left[2\underline{a} - \mathbb{E}^\eta[a] - \tilde{q}_1\right] \geq \left[\frac{2\underline{a} - \mathbb{E}^\nu[a]}{2}\right]^2 \end{cases}$$

Non déviation du meneur si : [suite]

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\tilde{q}_1^2 + \left[2\overline{a} - \mathbb{E}^\eta[a]\right]\tilde{q}_1 - \left[\frac{2\overline{a} - \mathbb{E}^\nu[a]}{2}\right]^2 \geq 0 \\ -\tilde{q}_1^2 + \left[2\underline{a} - \mathbb{E}^\eta[a]\right]\tilde{q}_1 - \left[\frac{2\underline{a} - \mathbb{E}^\nu[a]}{2}\right]^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = \left[2\overline{a} - \mathbb{E}^\eta[a]\right]^2 - \left[2\overline{a} - \mathbb{E}^\nu[a]\right]^2 > 0 \\ \Delta_2 = \left[2\underline{a} - \mathbb{E}^\eta[a]\right]^2 - \left[2\underline{a} - \mathbb{E}^\nu[a]\right]^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{q}_{11} = \frac{2\overline{a} - \mathbb{E}^\eta[a] - \sqrt{\Delta_1}}{2} \text{ et } \tilde{q}_{12} = \frac{2\overline{a} - \mathbb{E}^\eta[a] + \sqrt{\Delta_1}}{2} \\ \tilde{q}_{13} = \frac{2\underline{a} - \mathbb{E}^\eta[a] - \sqrt{\Delta_2}}{2} \text{ et } \tilde{q}_{14} = \frac{2\underline{a} - \mathbb{E}^\eta[a] + \sqrt{\Delta_2}}{2} \end{cases}$$

http://pascal.favard.free.fr/

Les équilibres mélangeants sont de la forme :

- Or $q_{11} < q_{12}$, $q_{13} < q_{14}$, $q_{12} > q_{13}$ et $q_{12} > q_{14}$
- Il y aura des équilibres mélangeants si $q_{13} < q_{11}$
- $\begin{cases} \nexists \tilde{q}_1 \in \mathbb{R}_+ \text{ si } q_{14} < q_{11} \\ \tilde{q}_1 \in [q_{13}, q_{14}] \text{ si } q_{13} > q_{11} \text{ , notons que : } \frac{a}{2} \in [q_{13}, q_{14}] \\ \tilde{q}_1 \in [q_{11}, q_{14}] \text{ si } q_{13} < q_{11} < q_{14} \end{cases}$

Équilibres semi-séparateurs

- $\mathbf{p}(\underline{a}|\tilde{q}_1) = 1$
- $\forall q_1 \in \mathbb{R}_+^* - \{\tilde{q}_1\}$ on a : $\mathbf{p}(\underline{a}|q_1) = \nu = 1 - \mathbf{p}(\overline{a}|q_1)$

avec : $\nu > 0 \Rightarrow \mathbb{E}^\nu[a] = \nu\underline{a} + (1-\nu)\overline{a}$

Le programme du suiveur est :

$$\mathscr{P}_{En_2} \left| \ \underset{\{q_2 \geq 0\}}{\text{Max}} \ \mathbb{E}\left[\pi_2(q_1, q_2)\right] = q_2[\mathbb{E}[a] - q_1 - q_2] \right. \qquad (10)$$

CN1 : $\dfrac{\partial \mathbb{E}\left[\pi_2(q_1,q_2)\right]}{\partial q_2} = [\mathbb{E}[a] - q_1 - q_2] - q_2 = 0$

CS2 : $\dfrac{\partial^2 \mathbb{E}\left[\pi_2(q_1,q_2)\right]}{\partial q_2^2} = -2 < 0$, vraie

$$\Rightarrow \begin{cases} q_2(\tilde{q}_1) = \dfrac{\underline{a} - \tilde{q}_1}{2} \\ q_2(q_1) = \dfrac{\mathbb{E}^\nu[a] - q_1}{2} \text{ si } q_1 \neq \tilde{q}_1 \end{cases}$$

Si $\underline{a}$, le programme du meneur est :

$$\mathscr{P}_{En_1} \left| \ \underset{\{q_1 \geq 0\}}{\text{Max}} \ \pi_1(q_1|\underline{a}) = q_1\left(\underline{a} - q_1 - \frac{\underline{a} - q_1}{2}\right) = q_1\left(\frac{\underline{a} - q_1}{2}\right) \right. \qquad (11)$$

CN1 : $\dfrac{\partial \pi_1(\cdot)}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \tilde{q}_1 = q_1^* = \dfrac{\underline{a}}{2} < \underline{a}$

CS2 : $\dfrac{\partial^2 \pi_1(\cdot)}{\partial q_1^2} = -1 < 0$, vraie

$\Rightarrow \pi_1(\tilde{q}_1|\underline{a}) = \dfrac{\underline{a}^2}{8}$

Si $\underline{a}$, le meneur joue en stratégie mixte ssi :

$\pi_1(q_1|\underline{a}) = \pi_1(\tilde{q}_1|\underline{a})$

$\Leftrightarrow q_1\left(\underline{a} - q_1 - \dfrac{\mathbb{E}^\nu[a] - q_1}{2}\right) = \dfrac{\underline{a}^2}{8}$

$\Leftrightarrow -q_1^2 + (2\underline{a} - \mathbb{E}^\nu[a])q_1 - \dfrac{\underline{a}^2}{4} = 0$ donc $\Delta = (2\underline{a} - \mathbb{E}^\nu[a])^2 - \dfrac{\underline{a}^2}{4} > 0$, les deux racines positives sont q_{11} et q_{12}

avec : $\pi_1(q_1|\overline{a}) > \pi_1(\tilde{q}_1|\overline{a})$

3. Jeux dynamiques
3.1 Jeu de signaux
3.2 Jeu de l'entrée
3.3 Modèle de Stackelberg avec information incomplète
3.4 Raffinements

Stratégie dominée

Définition :

Considérons un EBP, la stratégie $s_i' \in S_i$ du joueur i ayant observé la réalisation $\theta_i \in \Theta_i$ sera dominée à l'équilibre si :

$$\underset{\{s_{-i} \in S_{-i}\}}{\text{Max}} \ u_i(\theta_i, s_i', s_{-i}) < u_i(\theta_i, s^*)$$

Critère intuitif (Cho et Kreps (1987)) :

EBP robuste au critère intuitif s^* :

si la stratégie $s_i' \neq s_i^*$ du joueur i ayant observé la réalisation $\theta_i \in \Theta_i$ est dominée à l'équilibre alors les croyances du joueur $j \in \{1, .., i, .., N\}$ sont telles que : $\mathbf{p}_j(\theta_i|s_i') = 0$

http://pascal.favard.free.fr/

1. Introduction

2. Jeux statiques
2.1 Équilibre de Nash bayésien (Harsanyi (1967-68))
2.2 Modèle de Cournot avec information incomplète
2.3 Modèle de Bertrand avec information incomplète

3. Jeux dynamiques
3.1 Jeu de signaux
3.2 Jeu de l'entrée
3.3 Modèle de Stackelberg avec information incomplète
3.4 Raffinements