Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

Université François - Rabelais Tours

Les chapitres : L2 & L3

1ere Partie : Choix individuels

1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique

2nde Partie : Équilibre, défaillances du marché & pouvoir de marché

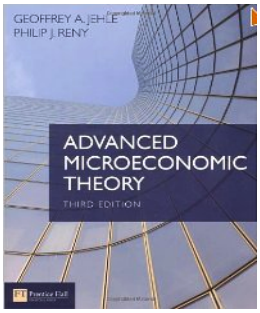
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole & monopole naturel
9. Externalité
10. Bien collectif

Chapitre 1 :

« Consommateur »

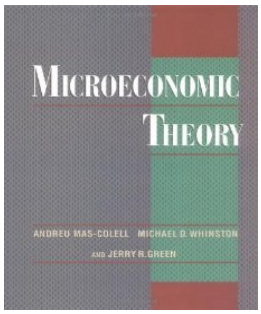
Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université

Plan

1. Introduction
2. Ensemble de consommation
3. Ensemble budgétaire
4. Utilités et Préférences
5. Le choix du consommateur

1. Introduction
2. Ensemble de consommation
3. Ensemble budgétaire
4. Utilités et Préférences
5. Le choix du consommateur

http://pascal.favard.free.fr/

Le consommateur est un agent économique :

- qui consomme L biens divisibles, si rien n'est précisé, pour augmenter sa satisfaction
- qui a des ressources (revenus, dividendes, aides, etc.), $\mathcal{R}$
- qui est supposé, dans ce chapitre :
  - être rationnel
  - être en information complète
  - être preneur en prix
  - vivre une seule période
  - vivre en univers non risqué

Notations vectorielles

- $\vec{x}$ est son vecteur de consommation, appelé panier du consommateur. Le vecteur de consommation est un vecteur colonne :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_L]^t.$$

- $\vec{p}$ est le vecteur prix des biens. Le vecteur prix est un vecteur ligne : $\vec{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_L]$.

Pourquoi étudier le comportement du consommateur ? Pour déterminer comment :

- une variation des prix unitaires modifie ses choix et son niveau de bien-être,
- une variation de son revenu modifie ses choix et son niveau de bien-être,
- une intervention de l'État modifie ses choix et son niveau de bien-être.

Le processus de consommation

- Goûts
- Prix Unitaires
- Ressources

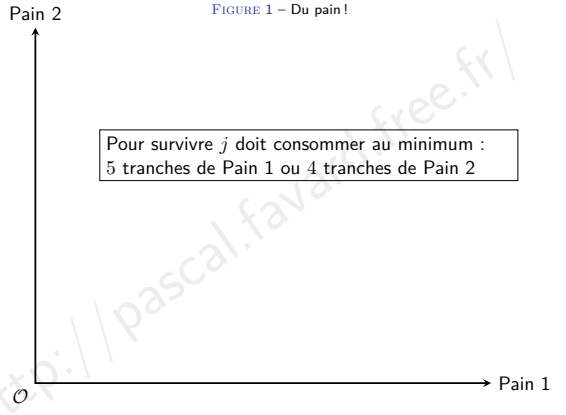
$\rightsquigarrow$ Choix sous contraintes du consommateur $\rightsquigarrow$ Achat sur le marché

1. Introduction
2. Ensemble de consommation
3. Ensemble budgétaire
4. Utilités et Préférences
5. Le choix du consommateur

L'ensemble de consommation, X, d'un agent est limité par un ensemble de contraintes physiques ou/et institutionnelles.

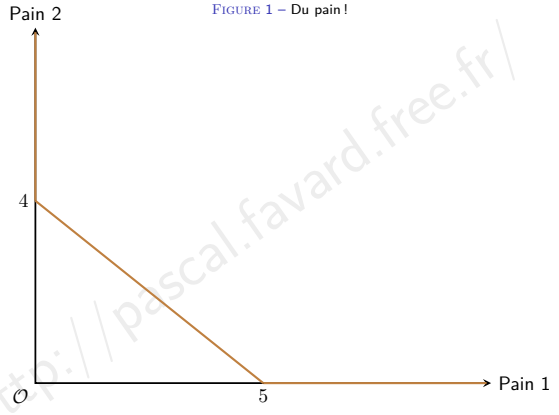
- $X \subseteq \mathbb{R}^L_+$.
- Si rien n'est précisé on a $X = \mathbb{R}^L_+$.
- Cet ensemble est alors convexe : soit $(\vec{x}, \vec{y}) \in X$, si $\vec{z} = \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}$ alors $\vec{z} \in X, \forall \alpha \in [0,1]$.
- Attention à la convexité de X.

Figure 1 – Du pain !



Pour survivre j doit consommer au minimum :
5 tranches de Pain 1 ou 4 tranches de Pain 2

Figure 1 – Du pain !



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 1 – Du pain !

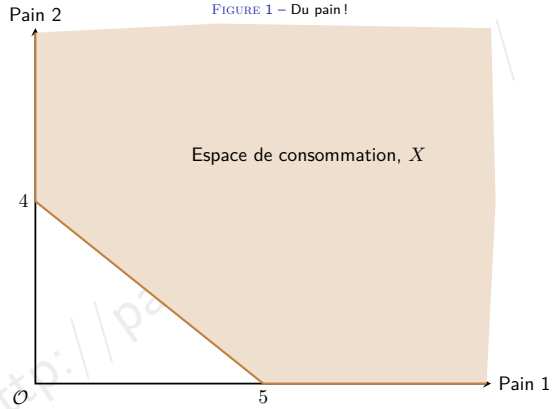


FIGURE 2 – Faut pas pousser...

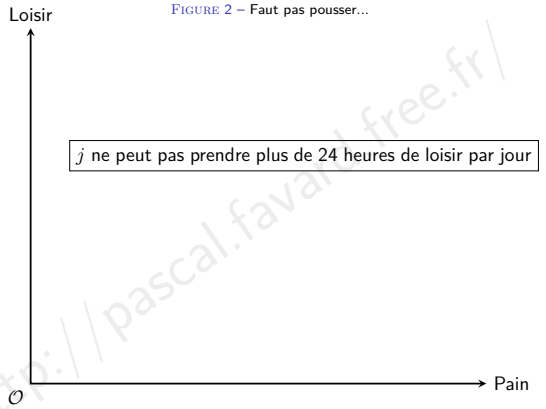


FIGURE 2 – Faut pas pousser...

FIGURE 2 – Faut pas pousser...

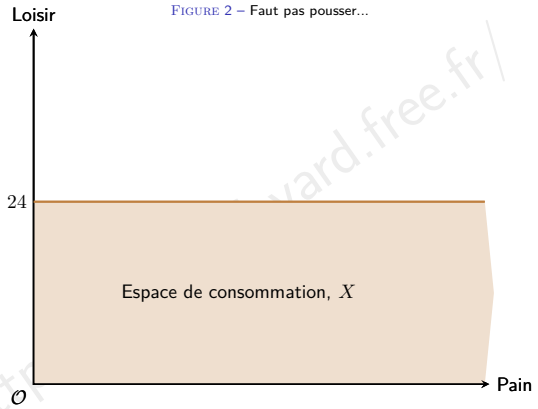


FIGURE 3 – Bien discret : Pas convexe :(

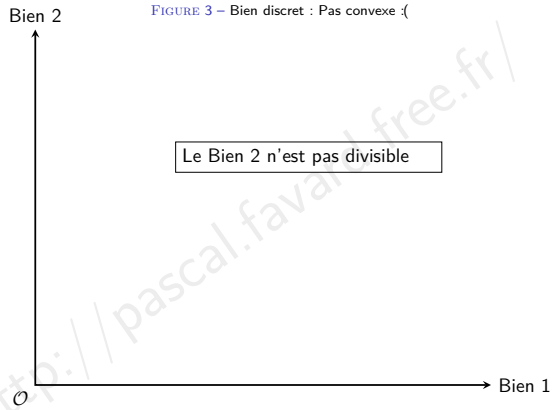
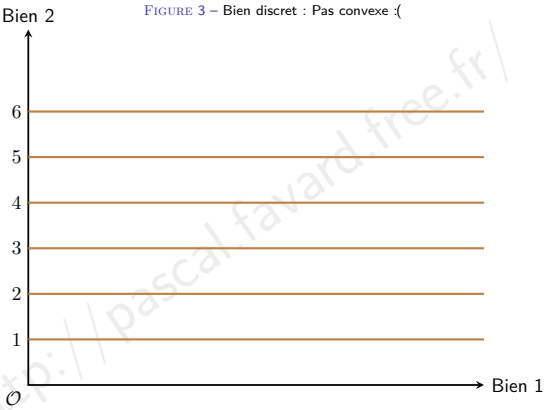


FIGURE 3 – Bien discret : Pas convexe :(



1. Introduction

2. Ensemble de consommation

3. Ensemble budgétaire

4. Utilités et Préférences

5. Le choix du consommateur

Hypothèses :

1. Les L biens sont échangés sur des marchés complets, $\vec{p} \in P \subset \mathbb{R}_+^L$. Chaque élément de $\vec{p}$ est le prix unitaire du bien correspondant, il est mesuré en unité monétaire par unité de bien.
2. L'agent j est preneur de prix -price taker-.

http://pascal.favard.free.fr/

Un panier $\vec{x} \in X$ sera donc accessible pour j si :

$$\boxed{\vec{p} \cdot \vec{x}_j \leq \mathcal{R}_j} \quad (1)$$

où $\mathcal{R}_j$ est l'ensemble des ressources monétaires de j, $\mathcal{R}_j > 0$.

Définition :

L'ensemble budgétaire $B_{\vec{p},\mathcal{R}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^L_+ : \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \mathcal{R}\}$ est l'ensemble de paniers de biens que le consommateur peut acquérir étant donné son revenu et les prix des biens.

Définition :

L'ensemble budgétaire $B_{\vec{p},\mathcal{R}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^L_+ : \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \mathcal{R}\}$ est l'ensemble de paniers de biens que le consommateur peut acquérir étant donné son revenu et les prix des biens.

Définition :

L'ensemble $\partial B_{\vec{p},\mathcal{R}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^L_+ : \vec{p} \cdot \vec{x} = \mathcal{R}\}$ est l'hyperplan budgétaire (contrainte budgétaire), si $L = 2$ on dit droite budgétaire si c'est une droite...

Définition :

L'ensemble budgétaire $B_{\vec{p},\mathcal{R}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^L_+ : \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \mathcal{R}\}$ est l'ensemble de paniers de biens que le consommateur peut acquérir étant donné son revenu et les prix des biens.

Définition :

L'ensemble $\partial B_{\vec{p},\mathcal{R}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^L_+ : \vec{p} \cdot \vec{x} = \mathcal{R}\}$ est l'hyperplan budgétaire (contrainte budgétaire), si $L = 2$ on dit droite budgétaire si c'est une droite...

$\Rightarrow \partial B_{\vec{p},\mathcal{R}} \subset B_{\vec{p},\mathcal{R}}$

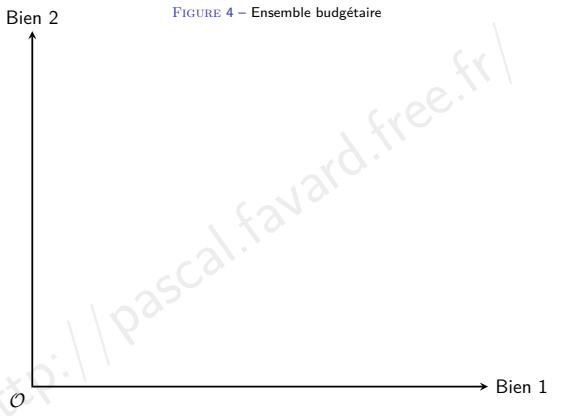


Figure 4 – Ensemble budgétaire

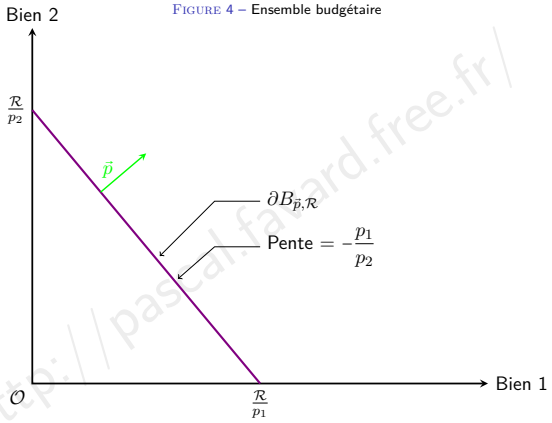


Figure 4 – Ensemble budgétaire

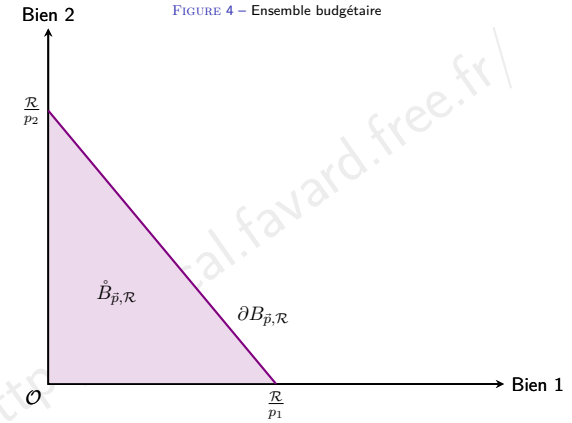


Figure 4 – Ensemble budgétaire

1. Introduction

2. Ensemble de consommation

3. Ensemble budgétaire

4. Utilités et Préférences

5. Le choix du consommateur

http://pascal.favard.free.fr/

4. Utilités et Préférences
4.1 Valeur subjective contre valeur objective
4.2 Utilité ordinale
4.3 Relations de préférence
4.4 Fonction d'utilité
4.5 Fonctions d'utilité particulières

http://pascal.favard.free.fr/

Avant le début, il y a eu le Paradoxe de St-Pétersbourg

1. Gabriel Cramer (1704-1752) mathématicien suisse.
   « Lettre du 21 mai 1728 à Nicolas Bernoulli »
2. Daniel Bernoulli (1700-1782) médecin, physicien et mathématicien suisse.
   « Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis » in Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 5 (1738)

Avant le début, il y a eu le Paradoxe de St-Pétersbourg

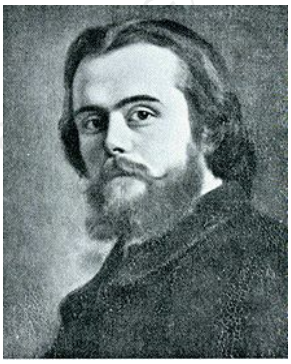
1. Gabriel Cramer (1704-1752) mathématicien suisse.
   « Lettre du 21 mai 1728 à Nicolas Bernoulli »
2. Daniel Bernoulli (1700-1782) médecin, physicien et mathématicien suisse.
   « Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis » in Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 5 (1738)

Au début, il y avait...

1. William Stanley Jevons (1835-1882) économiste anglais
2. Léon Walras (1834-1910) économiste français.
3. Carl Menger (1840-1921) économiste autrichien.

Au début, il y avait...

1. William Stanley Jevons (1835-1882) économiste anglais
2. Léon Walras (1834-1910) économiste français.
3. Carl Menger (1840-1921) économiste autrichien.



Au début, il y avait...

1. William Stanley Jevons (1835-1882) économiste anglais
2. Léon Walras (1834-1910) économiste français.
3. Carl Menger (1840-1921) économiste autrichien.

... avec des idées presque nouvelles !

Utilitarisme et marginalisme :

Stanley Jevons, Léon Walras et Carl Menger sont les trois économistes qui abandonnèrent au début des années 1870 la « valeur travail » adoptée par les classiques anglais (Smith, Ricardo) puis reprise par Marx.

Ils adoptèrent la « valeur utilité »(la valeur de la marchandise provient de l'utilité subjective propre à chaque individu).

Ils sont considérés comme co-fondateurs de l'école néoclassique et de la « révolution marginalisme. »

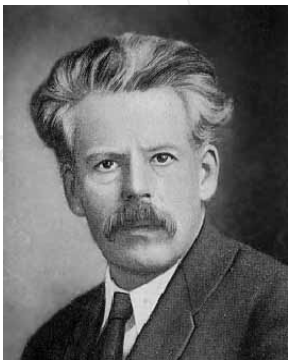
4. Utilités et Préférences
4.1 Valeur subjective contre valeur objective
4.2 Utilité ordinale
4.3 Relations de préférence
4.4 Fonction d'utilité
4.5 Fonctions d'utilité particulières

Après, il y a eu...
...pourquoi quantifier alors qu'il suffit d'ordonner !

1. Vilfredo Pareto (1848-1923) économiste italien.
2. Eugen Slutsky (1880-1948) économiste et un statisticien russe.
3. Sir John Richard Hicks (1904-1989) économiste britannique et co-lauréat, avec Kenneth Arrow du « prix Nobel » d'économie en 1972.
4. Paul Samuelson (1915-2009) économiste américain, « prix Nobel » en 1970.

Après, il y a eu...
...pourquoi quantifier alors qu'il suffit d'ordonner !

1. Vilfredo Pareto (1848-1923) économiste italien.
2. Eugen Slutsky (1880-1948) économiste et un statisticien russe.
3. Sir John Richard Hicks (1904-1989) économiste britannique et co-lauréat, avec Kenneth Arrow du « prix Nobel » d'économie en 1972.
4. Paul Samuelson (1915-2009) économiste américain, « prix Nobel » en 1970.

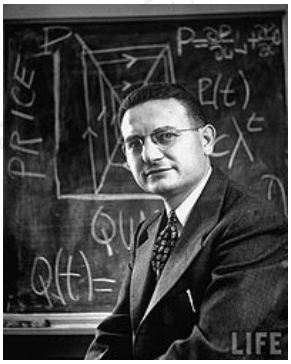


Après, il y a eu...
...pourquoi quantifier alors qu'il suffit d'ordonner !

1. Vilfredo Pareto (1848-1923) économiste italien.
2. Eugen Slutsky (1880-1948) économiste et un statisticien russe.
3. Sir John Richard Hicks (1904-1989) économiste britannique et co-lauréat, avec Kenneth Arrow du « prix Nobel » d'économie en 1972.
4. Paul Samuelson (1915-2009) économiste américain, « prix Nobel » en 1970.

Après, il y a eu...
...pourquoi quantifier alors qu'il suffit d'ordonner !

1. Vilfredo Pareto (1848-1923) économiste italien.
2. Eugen Slutsky (1880-1948) économiste et un statisticien russe.
3. Sir John Richard Hicks (1904-1989) économiste britannique et co-lauréat, avec Kenneth Arrow du « prix Nobel » d'économie en 1972.
4. Paul Samuelson (1915-2009) économiste américain, « prix Nobel » en 1970.



4. Utilités et Préférences
4.1 Valeur subjective contre valeur objective
4.2 Utilité ordinale
4.3 Relations de préférence
4.4 Fonction d'utilité
4.5 Fonctions d'utilité particulières

Objectif

- Le but est de résumer les goûts du consommateur dans une *relation de préférence* rationnelle.
- Il n'est donc pas nécessaire de pouvoir dire que $\vec{x}$ donne 2 fois plus de satisfaction à j que $\vec{y}$.
- Il suffit de savoir si $\vec{x}$ donne plus de satisfaction à j que $\vec{y}$.
- Ne compte donc que le classement des paniers, leur ordonnancement par j.
- Cela implique qu'il faut remonter d'un niveau : les préférences

Une relation binaire

- Notons $\succsim$ cette relation de préférence.
- $\succsim$ est une relation binaire sur l'ensemble des paniers de biens, X, disponibles.
- Elle permet la comparaison entre chaque paire de paniers $(\vec{x}, \vec{y}) \in X$.
- Si $\vec{x} \succsim \vec{y}$, on dira que j « préfère » le panier $\vec{x}$ au panier $\vec{y}$. Donc :
  1. la relation de stricte préférence, $\succ$, peut être définie par :
     $$\vec{x} \succ \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \succsim \vec{y} \text{ mais non } \vec{x} \precsim \vec{y}$$
  2. la relation d'indifférence, $\sim$, peut être définie par :
     $$\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \succsim \vec{y} \text{ et } \vec{x} \precsim \vec{y}$$

Rationalité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est rationnelle si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *Complétude : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in X$ on a $\vec{x} \succsim \vec{y}$ et/ou $\vec{x} \precsim \vec{y}$*
2. *Transitivité : $\forall (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in X$ si $\vec{x} \succsim \vec{y}$ et $\vec{y} \succsim \vec{z}$, alors $\vec{x} \succsim \vec{z}$*

http://pascal.favard.free.fr/

Rationalité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est rationnelle si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *Complétude :* $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in X$ *on a* $\vec{x} \succsim \vec{y}$ *et/ou* $\vec{x} \precsim \vec{y}$
2. *Transitivité :* $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in X$ *si* $\vec{x} \succsim \vec{y}$ *et* $\vec{y} \succsim \vec{z}$, *alors* $\vec{x} \succsim \vec{z}$

Rationalité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est rationnelle si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *Complétude :* $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in X$ *on a* $\vec{x} \succsim \vec{y}$ *et/ou* $\vec{x} \precsim \vec{y}$
2. *Transitivité :* $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in X$ *si* $\vec{x} \succsim \vec{y}$ *et* $\vec{y} \succsim \vec{z}$, *alors* $\vec{x} \succsim \vec{z}$

Remarque : On dira que la relation $\succsim$ est un préordre complet. Notons que la propriété de réflexivité est redondante avec la complétude.

Proposition :

Si $\succsim$ est rationnelle alors :

1. $\succ$ *est irréflexive et transitive*
2. $\sim$ *est réflexive, transitive et symétrique*
3. *Si* $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in X : \vec{x} \succ \vec{y} \succsim \vec{z}$ *alors* $\vec{x} \succ \vec{z}$

Proposition :

Si $\succsim$ est rationnelle alors :

1. $\succ$ *est irréflexive et transitive*
2. $\sim$ *est réflexive, transitive et symétrique*
3. *Si* $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in X : \vec{x} \succ \vec{y} \succsim \vec{z}$ *alors* $\vec{x} \succ \vec{z}$

Proposition :

Si $\succsim$ est rationnelle alors :

1. $\succ$ *est irréflexive et transitive*
2. $\sim$ *est réflexive, transitive et symétrique*
3. *Si* $\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in X : \vec{x} \succ \vec{y} \succsim \vec{z}$ *alors* $\vec{x} \succ \vec{z}$

Preuve : Cf. TD

Surface d'indifférence

Définition :

1. *Soit* $\vec{x}_1 \in X$, *l'ensemble* $\mathcal{I}_1 = \{\vec{x} \in X : \vec{x} \sim \vec{x}_1\}$ *est l'ensemble des paniers de biens qui procurent la même satisfaction que* $\vec{x}_1$ *au consommateur. Dans* X, $\mathcal{I}_1$ *est représenté par une surface d'indifférence.*
2. *Lorsque* $L = 2$ *on appelle ce lieu géométrique, courbe d'indifférence.*

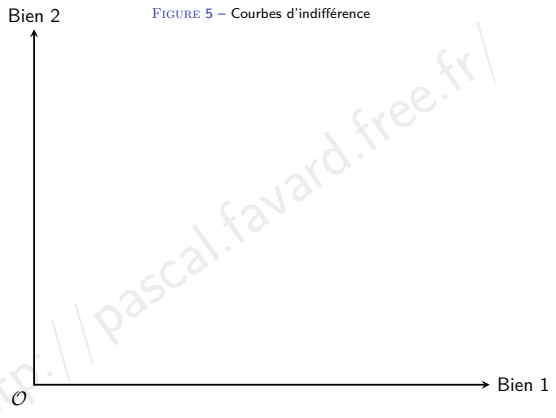


Figure 5 – Courbes d'indifférence

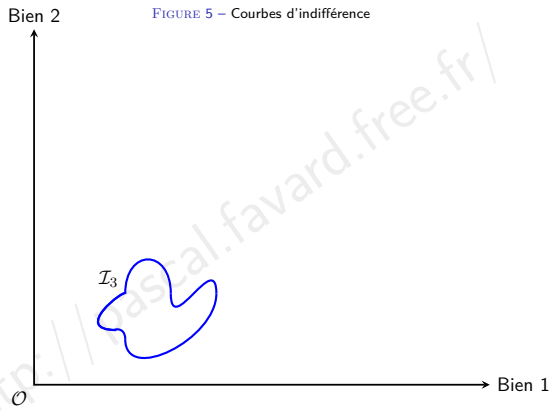


Figure 5 – Courbes d'indifférence

FIGURE 5 – Courbes d'indifférence

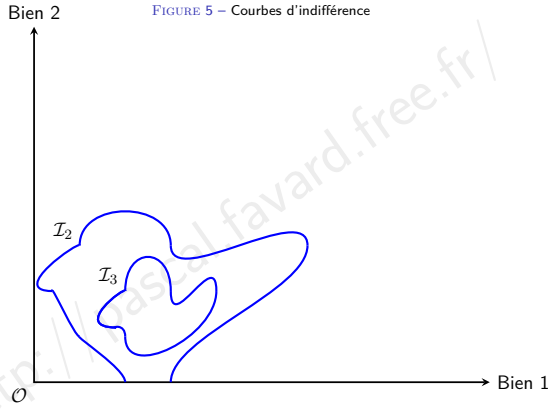


FIGURE 5 – Courbes d'indifférence

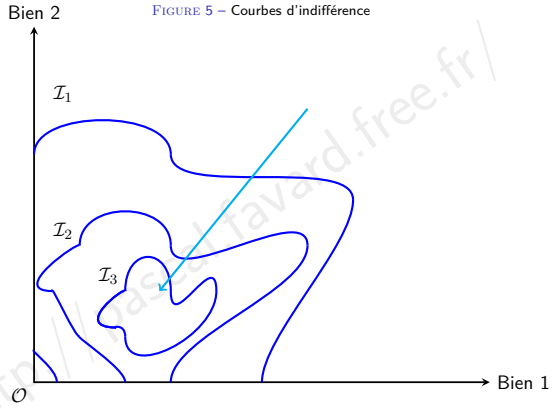


FIGURE 6 – Les courbes d'indifférence ne se coupent pas

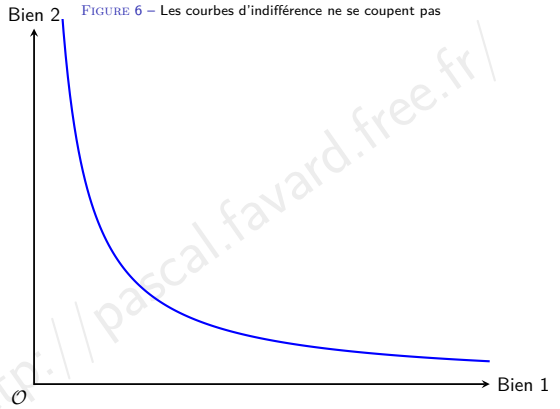


FIGURE 6 – Les courbes d'indifférence ne se coupent pas

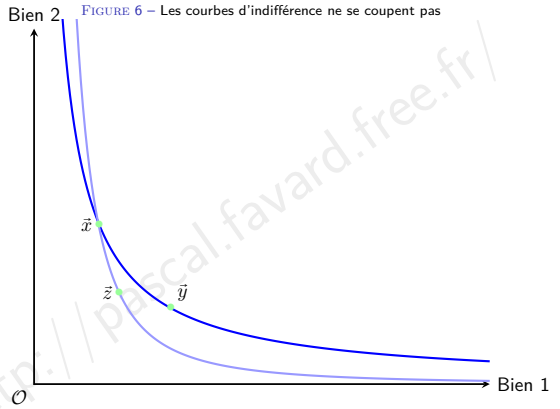
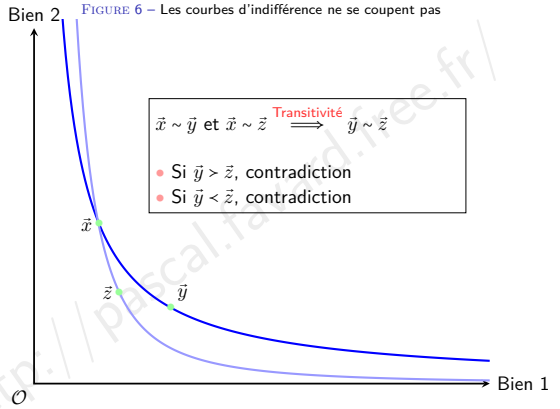


FIGURE 6 – Les courbes d'indifférence ne se coupent pas



$\vec{x} \sim \vec{y}$ et $\vec{x} \sim \vec{z} \overset{\text{Transitivité}}{\Longrightarrow} \vec{y} \sim \vec{z}$

- Si $\vec{y} \succ \vec{z}$, contradiction
- Si $\vec{y} \prec \vec{z}$, contradiction

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est (strictement) convexe sur X si $\forall \vec{x} \in X$, l'ensemble $\{\vec{y} \in X \ : \ \vec{y} \succsim \vec{x}\}$ est (strictement) convexe.

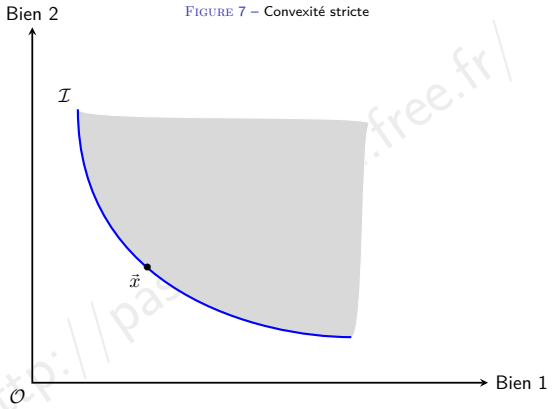
Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est (strictement) convexe sur X si $\forall \vec{x} \in X$, l'ensemble $\{\vec{y} \in X \ : \ \vec{y} \succsim \vec{x}\}$ est (strictement) convexe.

Remarque :

1. Convexité
   $\Rightarrow$ si $\vec{y} \succsim \vec{x}$ et $\vec{z} \succsim \vec{x}$, alors $(\alpha\vec{y} + (1-\alpha)\vec{z}) \succsim \vec{x}, \forall \alpha \in [0,1]$
2. Convexité stricte
   $\Rightarrow$ si $\vec{y} \succsim \vec{x}$ et $\vec{z} \succsim \vec{x}$, alors $(\alpha\vec{y} + (1-\alpha)\vec{z}) \succ \vec{x}, \forall \alpha \in]0,1[$
3. La convexité traduit la préférence pour la diversité
4. Si X n'est pas lui même convexe alors $\succsim$ ne peut pas l'être.

FIGURE 7 – Convexité stricte



http://pascal.favard.free.fr/

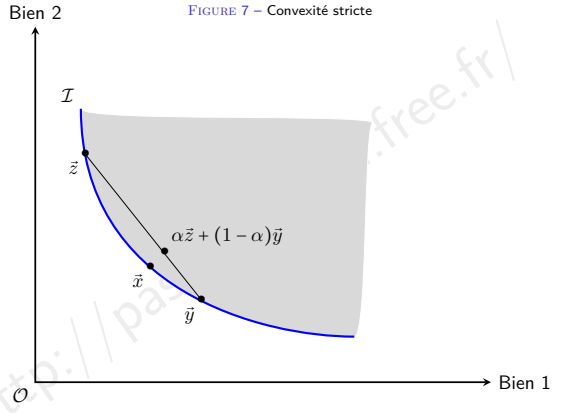


FIGURE 7 – Convexité stricte

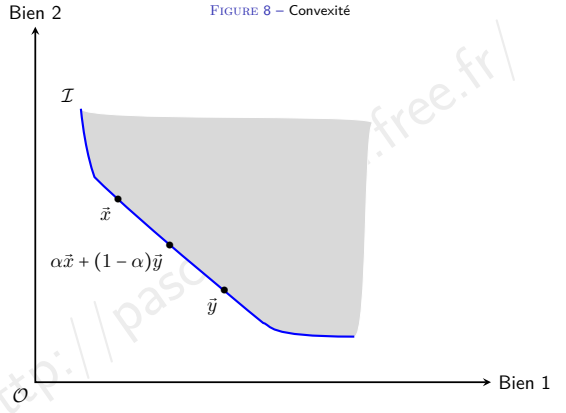


FIGURE 8 – Convexité

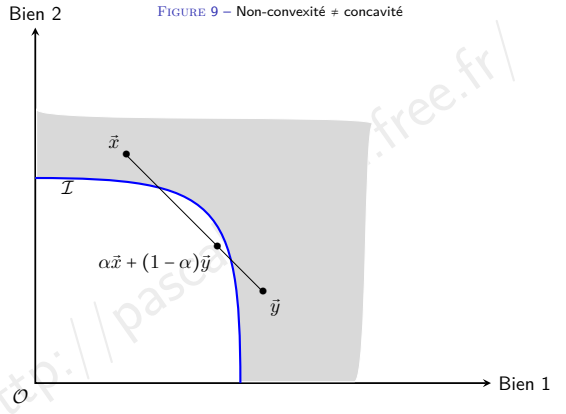


FIGURE 9 – Non-convexité ≠ concavité

Monotonie

Définition :
La relation de préférence $\succsim$ est monotone sur X :

$(\vec{x}, \vec{y}) \in X$ *et* $\vec{y} \gg \vec{x} \Rightarrow \vec{y} \succ \vec{x}$

Monotonie

Définition :
La relation de préférence $\succsim$ est monotone sur X :

$(\vec{x}, \vec{y}) \in X$ *et* $\vec{y} \gg \vec{x} \Rightarrow \vec{y} \succ \vec{x}$

Définition :
La relation de préférence $\succsim$ est fortement monotone sur X :

$(\vec{x}, \vec{y}) \in X$ *et* $\vec{y} \geq \vec{x}$ *mais* $\vec{y} \neq \vec{x} \Rightarrow \vec{y} \succ \vec{x}$

Monotonie

Définition :
La relation de préférence $\succsim$ est monotone sur X :

$(\vec{x}, \vec{y}) \in X$ *et* $\vec{y} \gg \vec{x} \Rightarrow \vec{y} \succ \vec{x}$

Définition :
La relation de préférence $\succsim$ est fortement monotone sur X :

$(\vec{x}, \vec{y}) \in X$ *et* $\vec{y} \geq \vec{x}$ *mais* $\vec{y} \neq \vec{x} \Rightarrow \vec{y} \succ \vec{x}$

Si biens complémentaires : préférences monotones mais pas fortement monotones

Non-satiété

La propriété de monotonie est généralement trop forte, la non-satiété locale est suffisante.

Définition :
La relation de préférence $\succsim$ vérifie localement la propriété de non-satiété sur X :

si $\forall \vec{x} \in X$ *et* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \vec{y} \in X$ *tel que* $\|\vec{y} - \vec{x}\| \leq \epsilon$ *et* $\vec{y} \succ \vec{x}$

Note : $\|\vec{x}\| = \sqrt{{}^t\vec{x} \cdot \vec{x}}$

Non-satiété

La propriété de monotonie est généralement trop forte, la non-satiété locale est suffisante.

Définition :
La relation de préférence $\succsim$ vérifie localement la propriété de non-satiété sur X :

si $\forall \vec{x} \in X$ *et* $\forall \epsilon > 0,\ \exists \vec{y} \in X$ *tel que* $\|\vec{y} - \vec{x}\| \leq \epsilon$ *et* $\vec{y} \succ \vec{x}$

Note : $\|\vec{x}\| = \sqrt{{}^t\vec{x} \cdot \vec{x}}$
Remarque : La monotonie stricte $\Rightarrow$ la non-satiété locale.

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 10 – Non-satiété

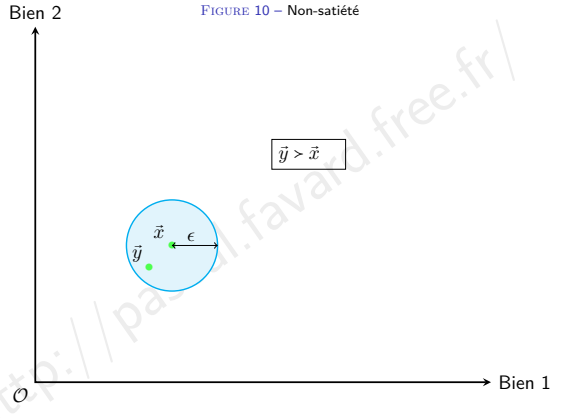


FIGURE 11 – Non-satiété ⇒ Non-épaisseur

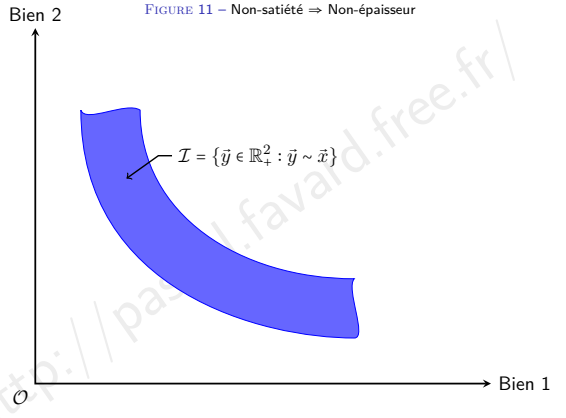


FIGURE 11 – Non-satiété ⇒ Non-épaisseur

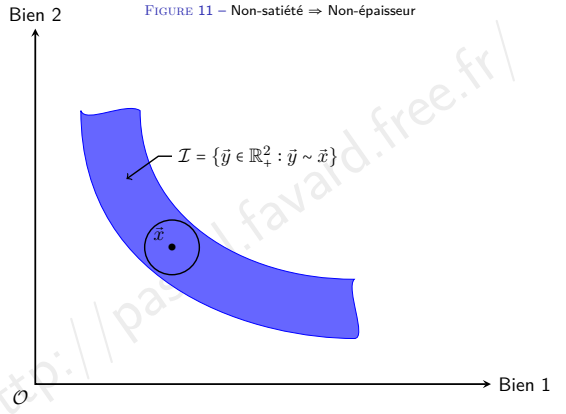
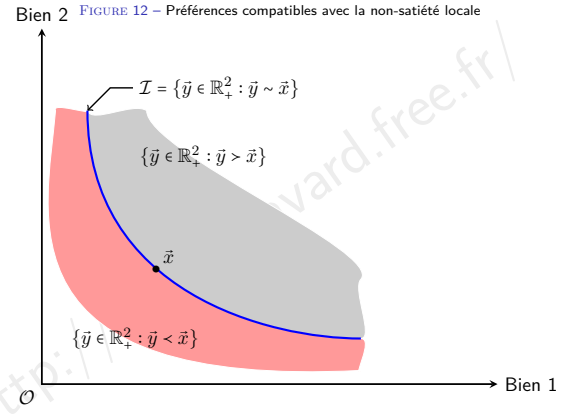


FIGURE 12 – Préférences compatibles avec la non-satiété locale



4. Utilités et Préférences
4.1 Valeur subjective contre valeur objective
4.2 Utilité ordinale
4.3 Relations de préférence
4.4 Fonction d'utilité
4.5 Fonctions d'utilité particulières

L'aspect calculatoire...

Définition :

Soit une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité représentant la relation de préférence $\succsim$ si $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in X : \vec{x} \succsim \vec{y} \Leftrightarrow u(\vec{x}) \geq u(\vec{y})$.

$$u : \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & u(\vec{x}) \end{cases}$$

L'aspect calculatoire...

Définition :

Soit une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité représentant la relation de préférence $\succsim$ si $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in X : \vec{x} \succsim \vec{y} \Leftrightarrow u(\vec{x}) \geq u(\vec{y})$.

$$u : \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & u(\vec{x}) \end{cases}$$

Proposition :

Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement croissante alors

$$v \equiv \phi \circ u : \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & \phi(u(\vec{x})) \end{cases}$$

représente elle aussi $\succsim$.

Preuve : Évidente

Proposition :

Si une relation de préférence, $\succsim$, peut être représentée par une fonction d'utilité alors elle est rationnelle.

Remarque : Toute relation de préférence rationnelle, $\succsim$, ne peut être représentée par une fonction d'utilité.

http://pascal.favard.free.fr/

Proposition :

Si une relation de préférence, $\succsim$, peut être représentée par une fonction d'utilité alors elle est rationnelle.

Preuve : La relation binaire $\geq$ est un préordre complet donc si elle représente $\succsim$ alors $\succsim$ doit être un préordre complet et donc rationnelle. ■

Continuité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ sur X est continue si l'ensemble $\{\vec{y} \in X \ : \ \vec{y} \succsim \vec{x}\}$ et l'ensemble $\{\vec{z} \in X \ : \ \vec{x} \succsim \vec{z}\}$ sont tous les deux fermés.

Continuité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ sur X est continue si l'ensemble $\{\vec{y} \in X \ : \ \vec{y} \succsim \vec{x}\}$ et l'ensemble $\{\vec{z} \in X \ : \ \vec{x} \succsim \vec{z}\}$ sont tous les deux fermés.

Proposition :

Si la relation de préférence $\succsim$ est continue sur X il existe une fonction d'utilité, $u(x)$, continue que représente $\succsim$.

Preuve : Difficile. « Les préférences ne varient pas lorsque l'on modifie à la marge le panier de biens »
Notons que la continuité des préférences est une condition suffisante pour l'existence d'une fonction d'utilité les représentant mais pas nécessaire.

Continuité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ sur X est continue si l'ensemble $\{\vec{y} \in X \ : \ \vec{y} \succsim \vec{x}\}$ et l'ensemble $\{\vec{z} \in X \ : \ \vec{x} \succsim \vec{z}\}$ sont tous les deux fermés.

Remarque : Les préférences lexicographiques ne sont pas continues. $\vec{x} \succsim \vec{y}$ si soit $x_1 > y_1$ ou soit $x_1 = y_1$ et $x_2 \geq y_2$.

Utilité quasi-concave

Proposition :

Si la relation de préférence $\succsim$ est convexe sur X alors $u(\vec{x})$ est quasi-concave (i.e. l'ensemble $\{\vec{y} \in X : u(\vec{y}) \geq u(\vec{x})\}$ est convexe $\forall \vec{x} \in X$.)
En fait $u(.)$ est quasi-concave si : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in X; \forall \alpha \in [0,1] : u(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \geq min\{u(\vec{x}), u(\vec{y})\}$

Preuve :

Évidente en posant $\vec{z} = \vec{x}$ dans la définition de la convexité de $\succsim$. ■

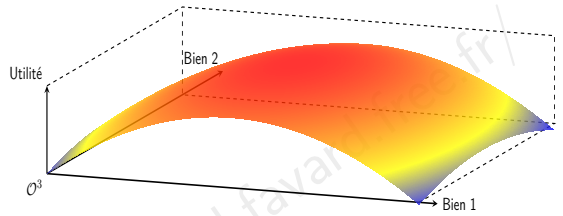


Figure 13 – Utilité : Concave

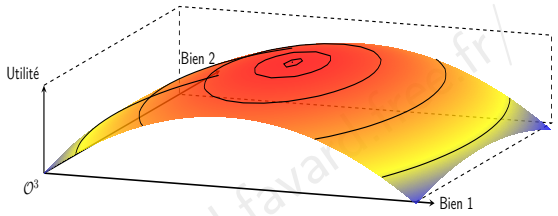


Figure 13 – Utilité : Concave

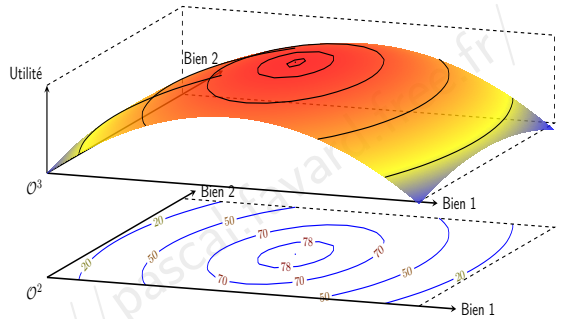


Figure 13 – Utilité : Concave

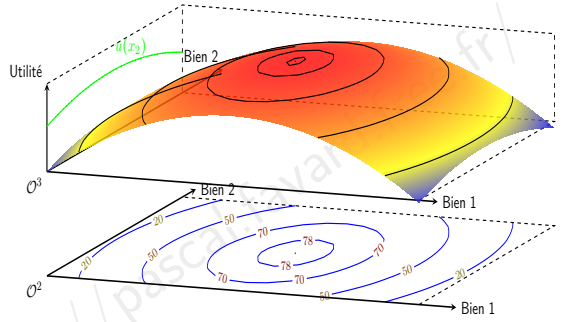


FIGURE 13 – Utilité : Concave

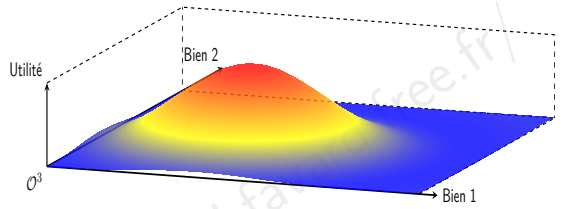


FIGURE 14 – Utilité : Quasi-concave

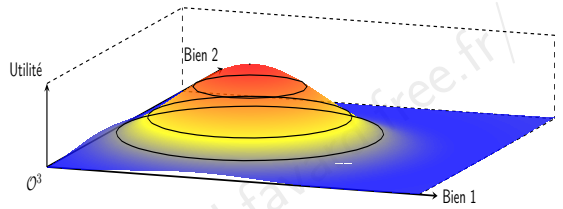


FIGURE 14 – Utilité : Quasi-concave

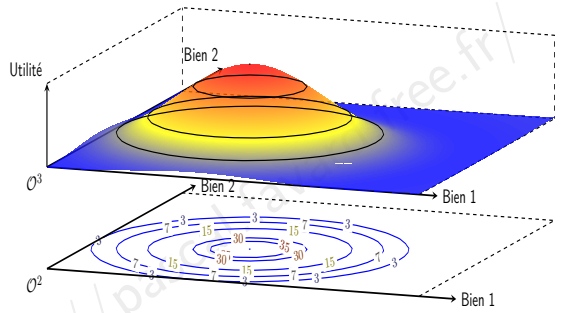


FIGURE 14 – Utilité : Quasi-concave

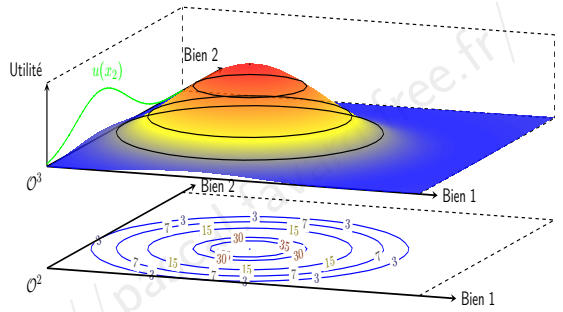


FIGURE 14 – Utilité : Quasi-concave

Utilité croissante

Proposition :

Si la relation de préférence $\succsim$ est monotone sur X alors $u(\vec{x})$ est croissante.

Preuve :

Si $\succsim$ est monotone alors $\vec{y} \gg \vec{x} \Rightarrow \vec{y} \succ \vec{x}$ donc si $\vec{y} \gg \vec{x} \Rightarrow u(\vec{y}) > u(\vec{x})$. ■

4. Utilités et Préférences
4.1 Valeur subjective contre valeur objective
4.2 Utilité ordinale
4.3 Relations de préférence
4.4 Fonction d'utilité
4.5 Fonctions d'utilité particulières

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+$, et $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^L$, la fonction u est du type Cobb-Douglas si :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_+^L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & A\prod_{\ell=1}^{L} x_\ell^{\alpha_\ell} \end{cases}$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+$, et $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \in \mathbb{R}_+^L$, la fonction u est du type Leontief si :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_+^L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & A\,min\{\alpha_1 x_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_L x_L + \beta_L\} \end{cases}$$

3. Soit $A \in \mathbb{R}_+$, et $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^L$, la fonction u est du type linéaire si :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_+^L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & A\,\vec{\alpha} \cdot \vec{x} \end{cases}$$

http://pascal.favard.free.fr/

4. Soit $A \in \mathbb{R}_+, r \in \mathbb{R}_+$, et $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^L$, la fonction u est du type CES si :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_+^L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & A\left[\sum_{\ell=1}^{L} \alpha_\ell x_\ell^r\right]^{\frac{1}{r}} \end{cases}$$

5. Soit $A \in \mathbb{R}_+$ et $v(.)$ une fonction de $\mathbb{R}_+^{L-1}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction u est du type quasi-linéaire (en x_ℓ) si :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & Ax_\ell + v\left(x_1, \cdots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \cdots, x_L\right) \end{cases}$$

Étude courbe d'indifférence : Cobb-Douglas (Diapo : 1)

Soit A, α et β trois réels positifs, la fonction u est du type Cobb-Douglas si :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & Ax_1^\alpha x_2^\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}_{\overline{u}} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 ; Ax_1^\alpha x_2^\beta = \overline{u}\right\}$$

L'équation de la courbe d'indifférence de niveau $\overline{u}$ est :

$$Ax_1^\alpha x_2^\beta = \overline{u}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \left(\frac{\overline{u}}{Ax_1^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \sqrt[\beta]{\frac{\overline{u}}{A}}\, x_1^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \mathcal{I}_{\overline{u}}(x_1)$$

Étude courbe d'indifférence : Cobb-Douglas (Diapo : 2)

Calculs des dérivées :

$$\mathcal{I}'_{\overline{u}}(x_1) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{I}_{\overline{u}}(x_1)}{\mathrm{d}x_1} = -\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[\beta]{\frac{\overline{u}}{A}}\, x_1^{-\frac{\alpha+\beta}{\beta}} < 0$$

$$\mathcal{I}''_{\overline{u}}(x_1) = \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{I}_{\overline{u}}(x_1)}{\mathrm{d}x_1^2} = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{\beta^2}\sqrt[\beta]{\frac{\overline{u}}{A}}\, x_1^{-\frac{\alpha+2\beta}{\beta}} > 0$$

Calculs des limites :

$$\lim_{x_1 \to 0_+} \mathcal{I}_{\overline{u}}(x_1) = +\infty \qquad \lim_{x_1 \to +\infty} \mathcal{I}_{\overline{u}}(x_1) = 0_+$$

$$\lim_{x_1 \to 0_+} \mathcal{I}'_{\overline{u}}(x_1) = -\infty \qquad \lim_{x_1 \to +\infty} \mathcal{I}'_{\overline{u}}(x_1) = 0_-$$

Tableau de variation

x_1	0		$+\infty$
$\mathcal{I}'_{\overline{u}}(x_1)$	$-\infty$	$-$	0_-
$\mathcal{I}''_{\overline{u}}(x_1)$		$+$	
$\mathcal{I}_{\overline{u}}(x_1)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Figure 15 – Préférences « Cobb-Douglas »

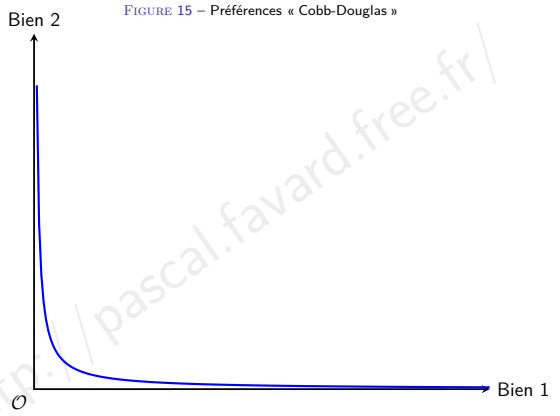


Figure 15 – Préférences « Cobb-Douglas »

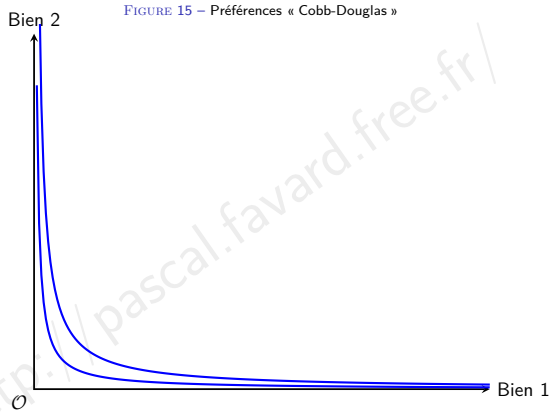


Figure 15 – Préférences « Cobb-Douglas »

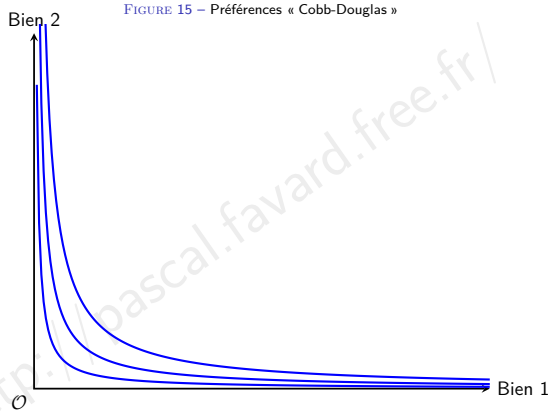
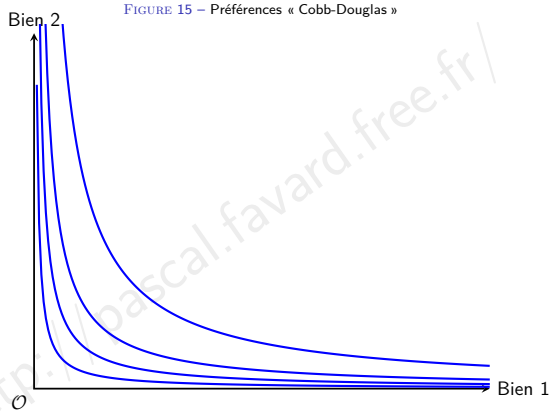
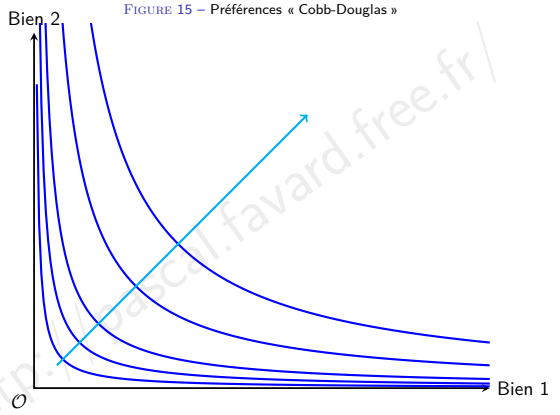


Figure 15 – Préférences « Cobb-Douglas »



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 15 – Préférences « Cobb-Douglas »



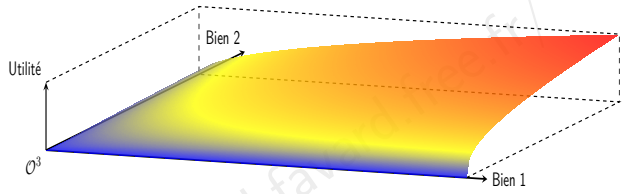


FIGURE 16 – Utilité : Cobb-Douglas1

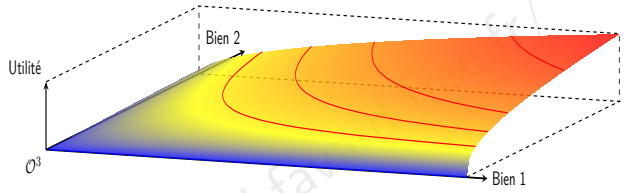


FIGURE 16 – Utilité : Cobb-Douglas1

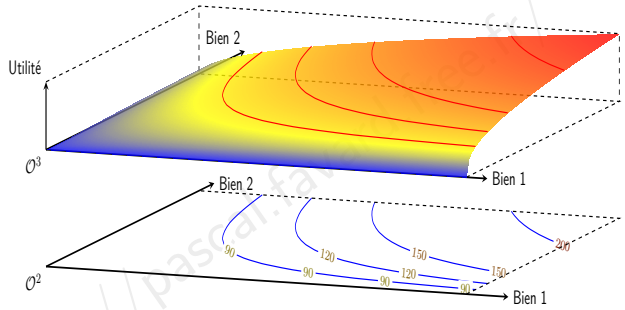


FIGURE 16 – Utilité : Cobb-Douglas1

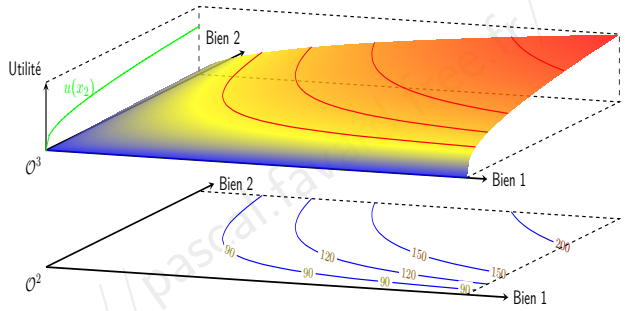


FIGURE 16 – Utilité : Cobb-Douglas1

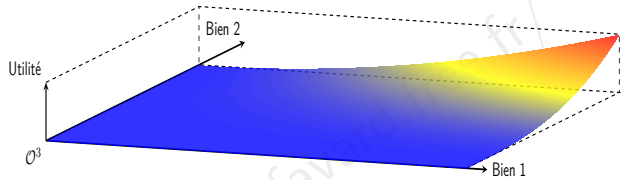


FIGURE 17 – Utilité : Cobb-Douglas2

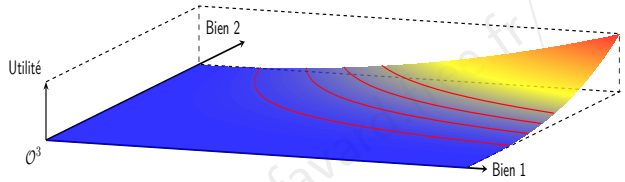


FIGURE 17 – Utilité : Cobb-Douglas2

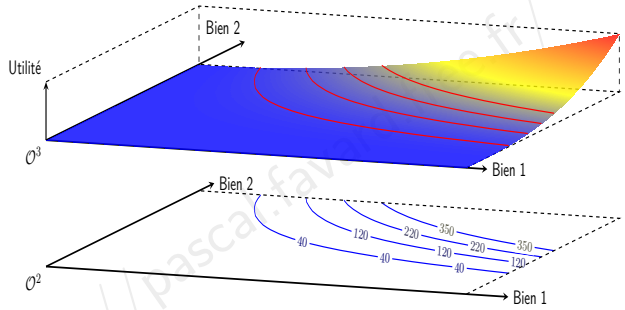


FIGURE 17 – Utilité : Cobb-Douglas2

http://pascal.favard.free.fr/

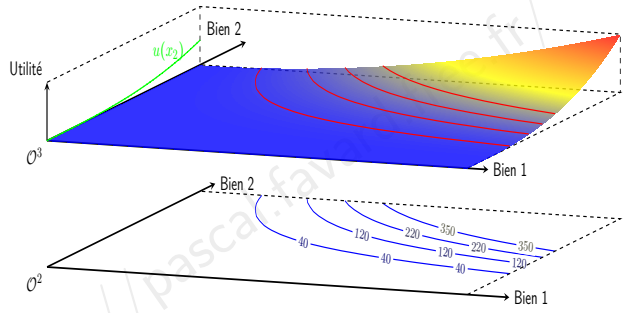


FIGURE 17 – Utilité : Cobb-Douglas2

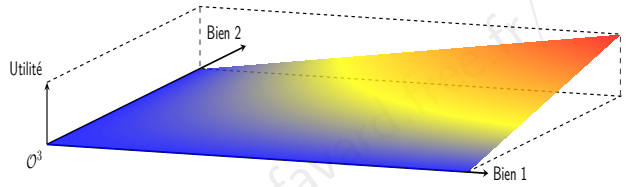


FIGURE 18 – Utilité : Cobb-Douglas3

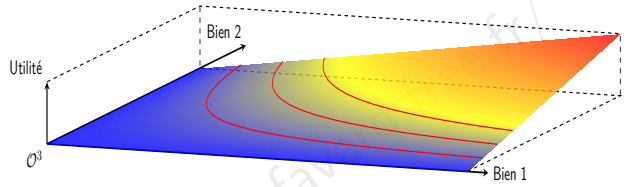


FIGURE 18 – Utilité : Cobb-Douglas3

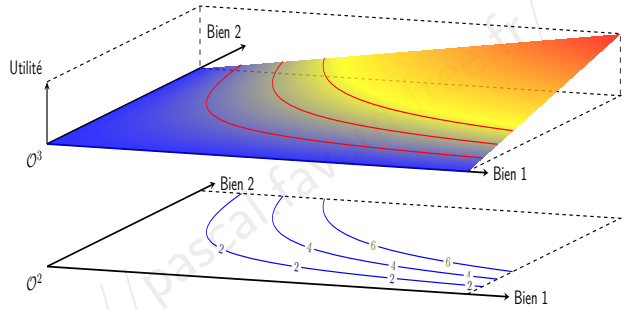


FIGURE 18 – Utilité : Cobb-Douglas3

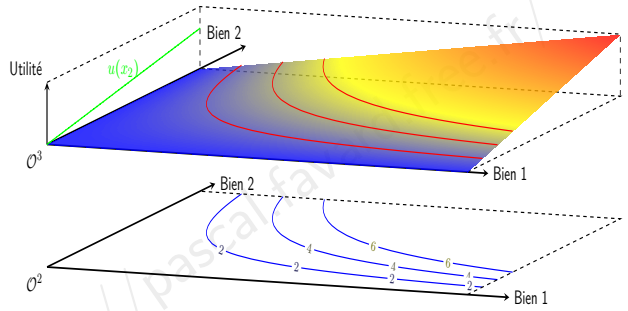


FIGURE 18 – Utilité : Cobb-Douglas3

1. Introduction

2. Ensemble de consommation

3. Ensemble budgétaire

4. Utilités et Préférences

5. Le choix du consommateur

5. Le choix du consommateur
5.1 La maximisation de l'utilité
5.2 Statique comparative
5.3 Exemples
5.4 Fonction d'utilité indirecte

Le consommateur cherche le panier de biens qui maximise son utilité sachant qu'il ne peut pas dépenser plus que ses ressources, $\mathcal{R}$, et que son ensemble de consommation, X, est $\mathbb{R}^L_+$. Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_{Consommateur} \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{x} \in X\}}{\text{Max}} \; u(\vec{x}) \\ \quad slc \; \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \mathcal{R} \end{array} \right. \tag{1}$$

http://pascal.favard.free.fr/

Proposition :

Si $\vec{p} \gg \vec{0}$ et $u(\cdot)$ continue alors le programme $\mathscr{P}_c$, (1), a au moins une solution.

Proposition :

Si $\vec{p} \gg \vec{0}$ et $u(\cdot)$ continue alors le programme $\mathscr{P}_c$, (1), a au moins une solution.

Preuve : Si $\vec{p} \gg \vec{0}$, alors $B_{\vec{p},\mathcal{R}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}_+^L : \vec{p}\cdot\vec{x} \leq \mathcal{R}\}$ est compact (fermé borné). Une fonction continue a toujours un maximum sur un compact. ■

Proposition :

Si $\vec{p} \gg \vec{0}$ et $u(\cdot)$ continue alors le programme $\mathscr{P}_c$, (1), a au moins une solution.

La solution de $\mathscr{P}_c$, sera notée : $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$. Chaque élément de ce vecteur représente le meilleur (si solution unique) choix de consommation de j en bien i pour chaque vecteur de prix, à $\mathcal{R}$ fixé.

Si $u(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\exists\lambda \geq 0$ tel qu'un meilleur choix $\vec{x}^* \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ solution de (1), doit être solution de :

$$\mathscr{P}_C \left| \underset{\{\vec{x}\in X,\lambda\}}{\text{Max}} \mathcal{L}(\vec{x},\lambda) = u(\vec{x}) - \lambda(\vec{p}\cdot\vec{x} - \mathcal{R}) \right. \tag{2}$$

$$CN1 : \begin{cases} \nabla u(\vec{x}^*) \leqq \lambda\vec{p} & (u_{m_\ell}(\vec{x}^*) = \lambda p_\ell, \text{ si } x_\ell^* > 0) \\ [\nabla u(\vec{x}^*) - \lambda\vec{p}]\cdot\vec{x}^* = 0 \\ \vec{p}\cdot\vec{x}^* \leq \mathcal{R} \end{cases} \tag{3}$$

CS2 :

1. $\vec{x}^*$ est un maximun local si les $L-1$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $\mathcal{L}$ évaluée en $(\vec{x}^*,\lambda)$ sont alternativement > 0 et < 0, le dernier D_{L+1} étant du même signe que $(-1)^L$.
2. $\vec{x}^*$ est un maximun global si $\mathcal{L}$ est une fonction concave (c'est le cas si u est une fonction concave et $\lambda(\vec{p}\cdot\vec{x} - \mathcal{R})$ est convexe.)

Solution intérieure

Revenons aux CN1 :

$$CN1 : \begin{cases} \nabla u(\vec{x}^*) \leqq \lambda\vec{p} \\ [\nabla u(\vec{x}^*) - \lambda\vec{p}]\cdot\vec{x}^* = 0 \\ \vec{p}\cdot\vec{x}^* \leq \mathcal{R} \end{cases}$$

Si $\vec{x}^* \gg \vec{0}$ alors on a une solution intérieure et donc $\nabla u(\vec{x}^*) \equiv \lambda\vec{p}$

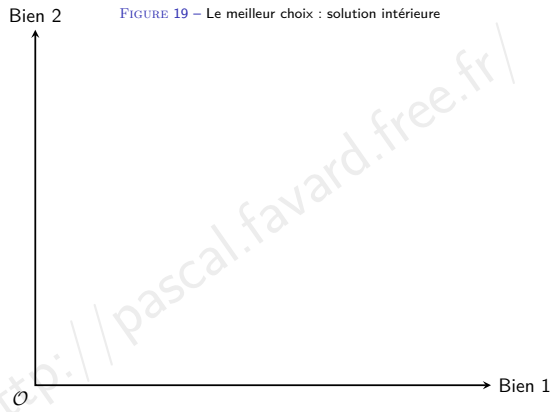


Figure 19 – Le meilleur choix : solution intérieure

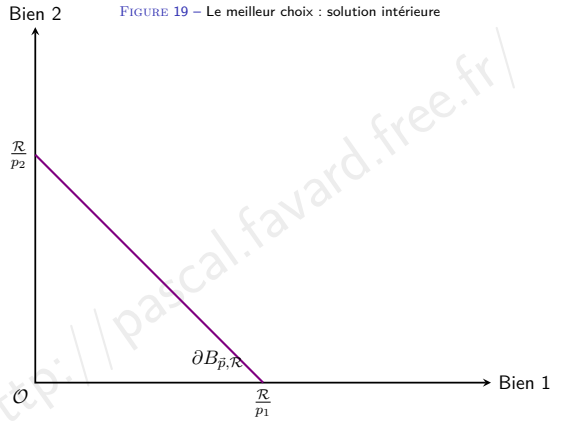


Figure 19 – Le meilleur choix : solution intérieure

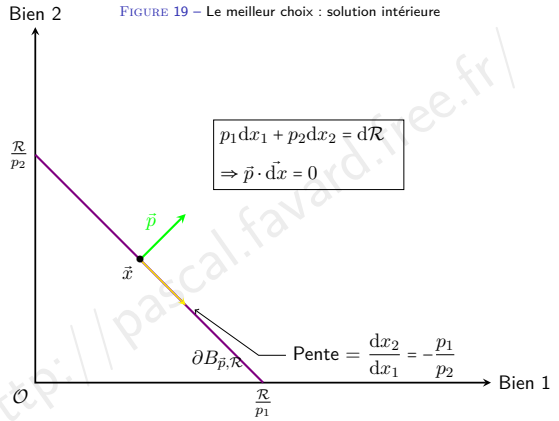


Figure 19 – Le meilleur choix : solution intérieure

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 19 – Le meilleur choix : solution intérieure

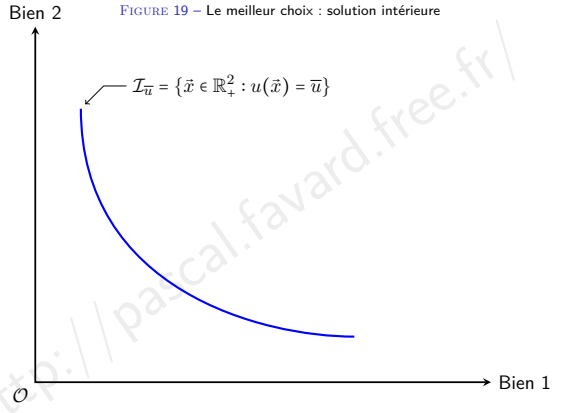


FIGURE 19 – Le meilleur choix : solution intérieure

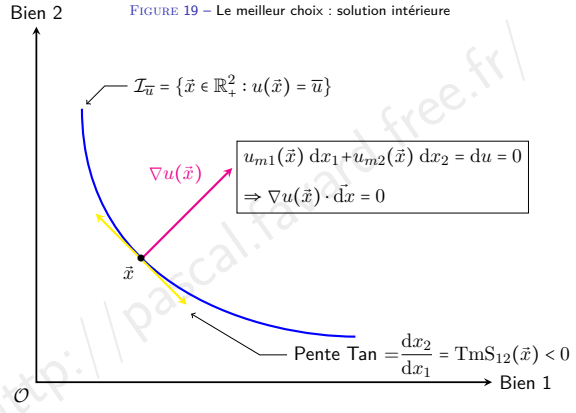
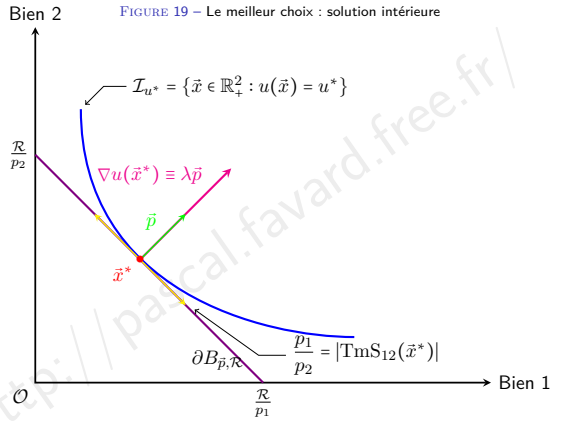


FIGURE 19 – Le meilleur choix : solution intérieure



Définition :

On appellera : Taux marginal de Substitution du bien ℓ au bien k évalué au panier $\vec{x}$, $\mathrm{TmS}_{\ell k}(\vec{x})$, la quantité de bien k à laquelle le consommateur est prêt à renoncer pour obtenir une unité supplémentaire de bien ℓ tout en maintenant son niveau de satisfaction au niveau de celui engendré par la consommation du panier $\vec{x}$.

Proposition :

Lorsque la fonction d'utilité est $\mathcal{C}^1$ on a donc :

$$\mathrm{TmS}_{\ell k}(\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_\ell} = -\frac{\dfrac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_\ell}}{\dfrac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_k}} = -\frac{u_{m_\ell}(\vec{x})}{u_{m_k}(\vec{x})}$$

Proposition :

Le multiplicateur de Lagrange, λ, représente l'accroissement du niveau d'utilité lorsque le revenu, $\mathcal{R}$, augmente marginalement. C'est un prix (coût) implicite -shadow price (cost)-. On peut dire aussi que λ c'est « l'utilité marginale du revenu ».

Preuve : Posons $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R}) \gg \vec{0}$. En utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée, la variation d'utilité suite à une variation marginale de $\mathcal{R}$ est égale à :

$$\nabla u(\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})) \cdot D_{\mathcal{R}}(\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})) = \lambda \vec{p} \cdot D_{\mathcal{R}}(\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})) = \lambda$$

puisque :

$$\vec{p} \cdot \vec{x} = \mathcal{R} \Rightarrow \vec{p} \cdot D_{\mathcal{R}}(\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})) = 1 \blacksquare$$

Solution en coin

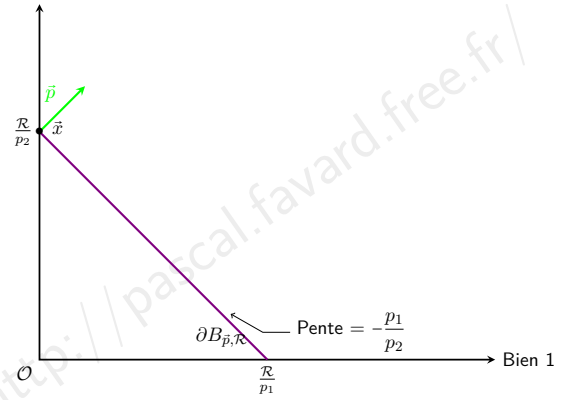
Revenons aux CN1 :

$$CN1 : \begin{cases} \nabla u(\vec{x}^*) \ll \lambda \vec{p} \\ [\nabla u(\vec{x}^*) - \lambda \vec{p}] \cdot \vec{x}^* = 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{x}^* \leq \mathcal{R} \end{cases}$$

Si des éléments de $\vec{x}^*$ sont nuls alors on a une solution en coin et donc $[\nabla u(\vec{x}^*) - \lambda \vec{p}] \perp \vec{x}^*$

FIGURE 20 – Le meilleur choix : solution en coin

FIGURE 20 – Le meilleur choix : solution en coin



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 20 – Le meilleur choix : solution en coin

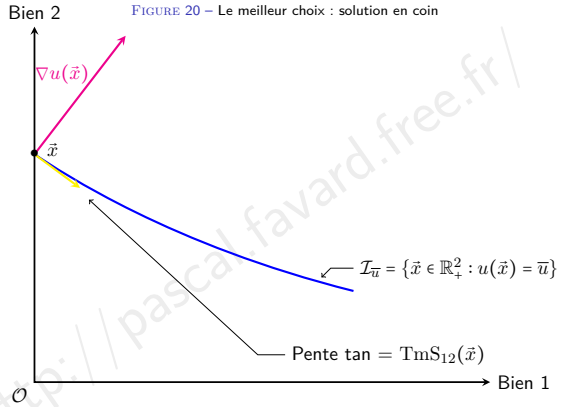
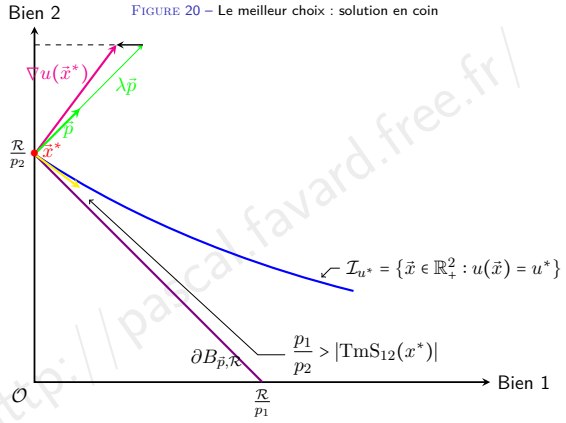


FIGURE 20 – Le meilleur choix : solution en coin



5. Le choix du consommateur
5.1 La maximisation de l'utilité
5.2 Statique comparative
5.3 Exemples
5.4 Fonction d'utilité indirecte

FIGURE 21 – Sentier d'expansion revenu (consommation-revenu)

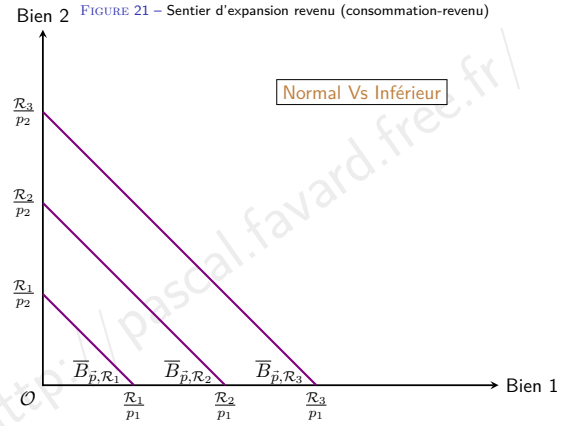


FIGURE 21 – Sentier d'expansion revenu (consommation-revenu)

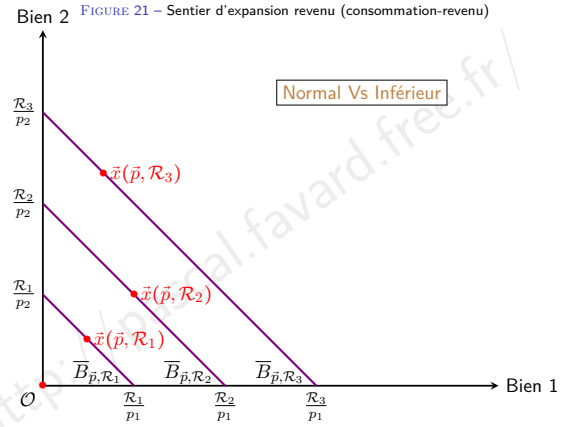


FIGURE 21 – Sentier d'expansion revenu (consommation-revenu)

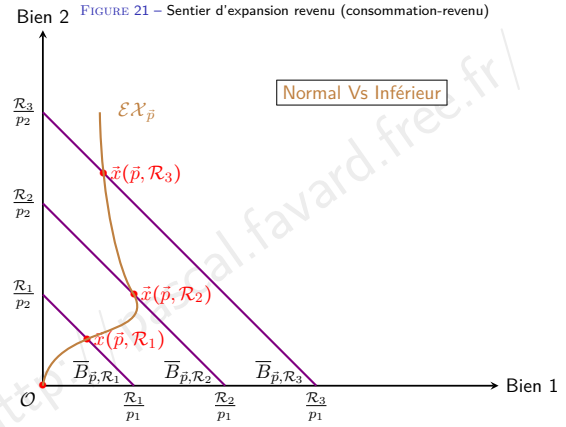


FIGURE 22 – Courbe d'Engel : bien 2 normal

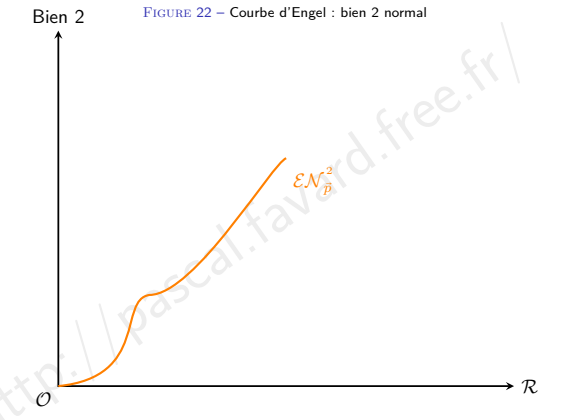
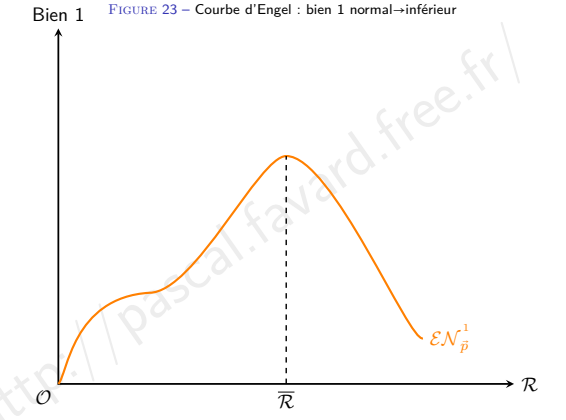


FIGURE 23 – Courbe d'Engel : bien 1 normal→inférieur



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 24 – Sentier d'expansion prix (consommation-prix)

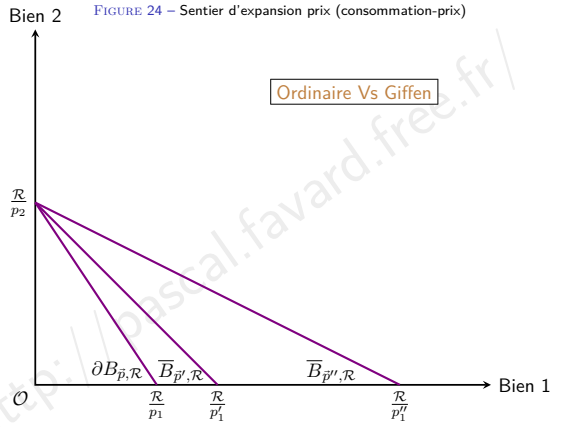


FIGURE 24 – Sentier d'expansion prix (consommation-prix)

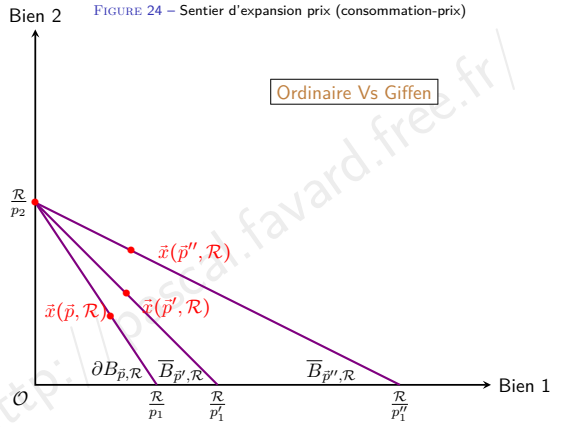
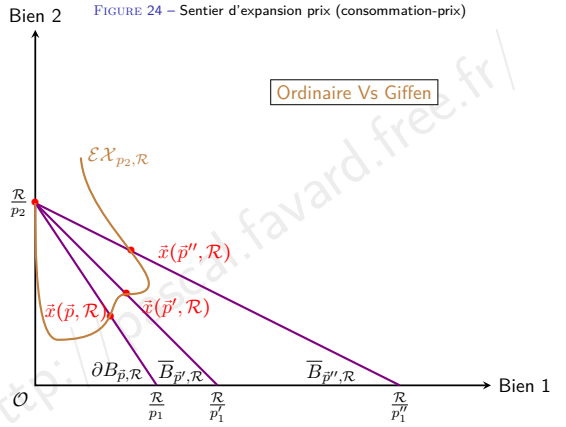


FIGURE 24 – Sentier d'expansion prix (consommation-prix)



5. Le choix du consommateur
5.1 La maximisation de l'utilité
5.2 Statique comparative
5.3 Exemples
5.4 Fonction d'utilité indirecte

Cobb-Douglas

Le consommateur cherche le panier de biens qui maximise son utilité $\left(u(\vec{x}) = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}\right)$ sachant qu'il ne peut pas dépenser plus que ses ressources, $\mathcal{R}$, et que son ensemble de consommation, est $\mathbb{R}_+^2$. Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_{C-CD} \left| \begin{array}{l} \underset{\{x_1,x_2\}}{\text{Max}} \; Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta} \\ slc \; p_1x_1 + p_2x_2 = \mathcal{R} \end{array} \right. \tag{4}$$

FIGURE 25 – Le meilleur choix : Préférences « Cobb-Douglas »

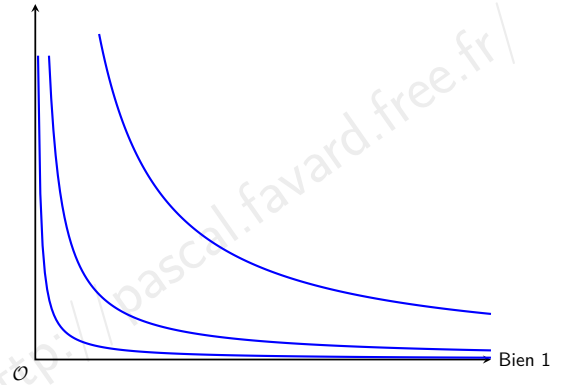


FIGURE 25 – Le meilleur choix : Préférences « Cobb-Douglas »

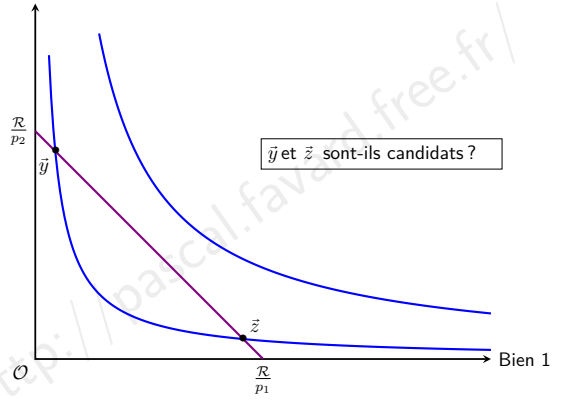
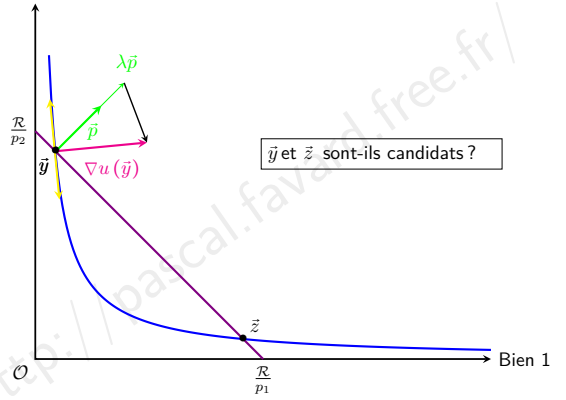


FIGURE 25 – Le meilleur choix : Préférences « Cobb-Douglas »



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 25 – Le meilleur choix : Préférences « Cobb-Douglas »

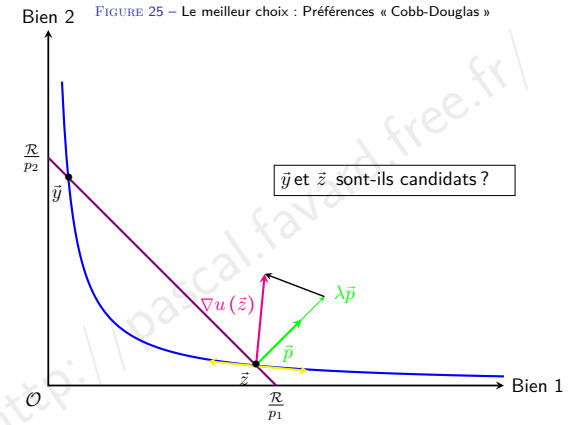
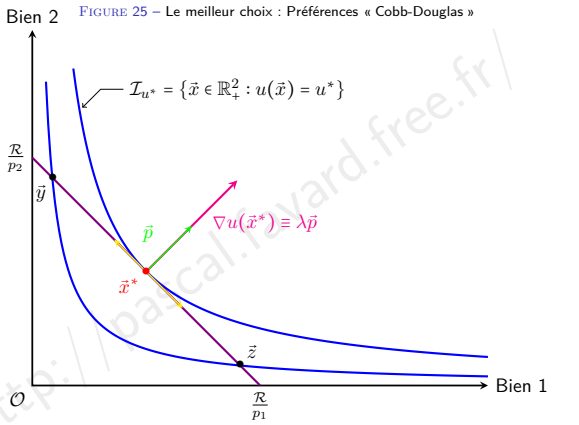


FIGURE 25 – Le meilleur choix : Préférences « Cobb-Douglas »



La fonction Cobb-Douglas est quasi-concave, donc les conditions nécessaires de premier ordre sont aussi suffisantes. Le meilleur choix est tel que les quantités consommées sont strictement positives. Ces quantités sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{TmS}_{12}(\vec{x}) = -\dfrac{u_{m_1}(\vec{x})}{u_{m_2}(\vec{x})} = -\dfrac{p_1}{p_2} \\ \\ p_1x_1 + p_2x_2 = \mathcal{R} \end{cases} \tag{5}$$

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{A\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ \\ p_1x_1 + p_2x_2 = \mathcal{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ \\ p_1x_1 + p_2x_2 = \mathcal{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{p_1\beta x_1}{\alpha p_2} \\ \\ p_1x_1 + p_2x_2 = \mathcal{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \dfrac{\alpha\mathcal{R}}{(\alpha+\beta)p_1} \\ \\ x_2^* = \dfrac{\beta\mathcal{R}}{(\alpha+\beta)p_2} \end{cases} \tag{6}$$

Leontief

Soit α_1 et α_2 deux réels strictement positifs, la fonction u est du type Leontief si :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \\ \vec{x} & \longmapsto & min\{\alpha_1x_1, \alpha_2x_2\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}_{\overline{u}} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_1 = \frac{\overline{u}}{\alpha_1} \, et \, x_2 \geq \frac{\overline{u}}{\alpha_2}\right\} \cup \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, x_1 \geq \frac{\overline{u}}{\alpha_1} \, et \, x_2 = \frac{\overline{u}}{\alpha_2}\right\}$$

FIGURE 26 – Les compléments parfaits

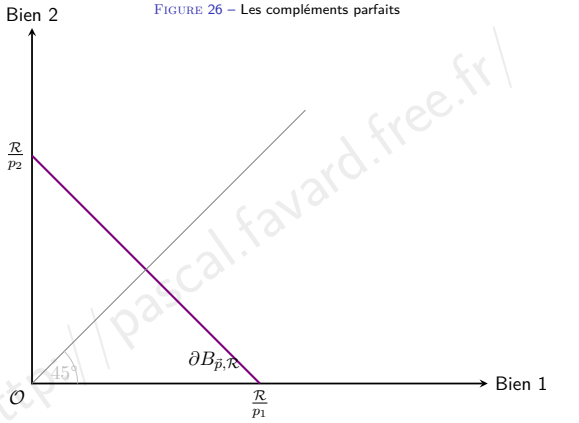


FIGURE 26 – Les compléments parfaits

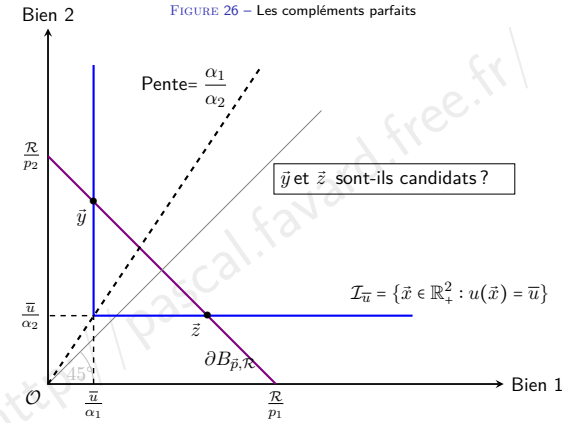
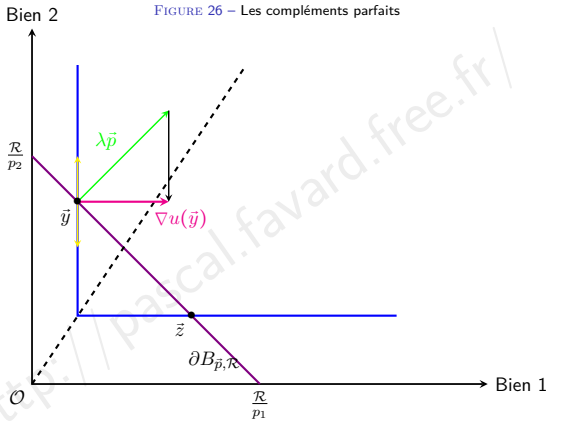
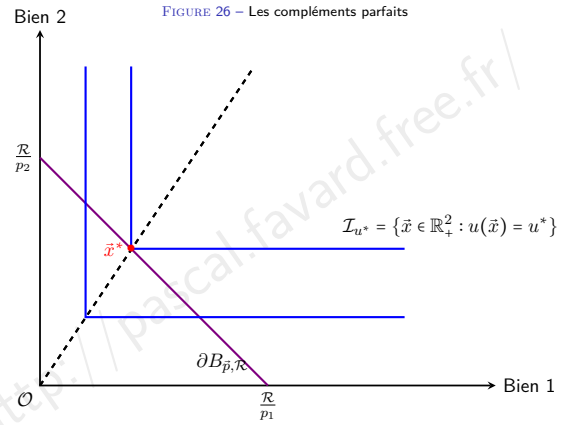


FIGURE 26 – Les compléments parfaits



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 26 – Les compléments parfaits



Le consommateur cherche le panier de biens qui maximise son utilité ($u(\vec{x}) = min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\}$) sachant qu'il ne peut pas dépenser plus que ses ressources, $\mathcal{R}$, et que son ensemble de consommation, est $\mathbb{R}^2_+$. Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_{C-L} \left| \begin{array}{l} \underset{\{x_1,x_2\}}{\text{Max}} \; min\{\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2\} \\ slc \; p_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathcal{R} \end{array} \right. \tag{7}$$

Cette fonction d'utilité est quasi-concave mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$. Le meilleur choix est tel que les quantités consommées sont strictement positives. Ces quantités sont solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = \mathcal{R} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \dfrac{\alpha_2 \mathcal{R}}{\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2} \\ x_2^* = \dfrac{\alpha_1 \mathcal{R}}{\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2} \end{array} \right. \tag{8}$$

Linéaire

Soit α et β deux réels positifs, la fonction u est du type Linéaire si :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & \alpha x_1 + \beta x_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \mathcal{I}_{\overline{u}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2_+ \,|\, \alpha x_1 + \beta x_2 = \overline{u} \right\}$$

L'équation d'une courbe d'indifférence est donc :

$$x_2 = \mathcal{I}_{\overline{u}}(x_1) = -\frac{\alpha}{\beta} x_1 + \frac{\overline{u}}{\beta}$$

FIGURE 27 – Les substituts parfaits

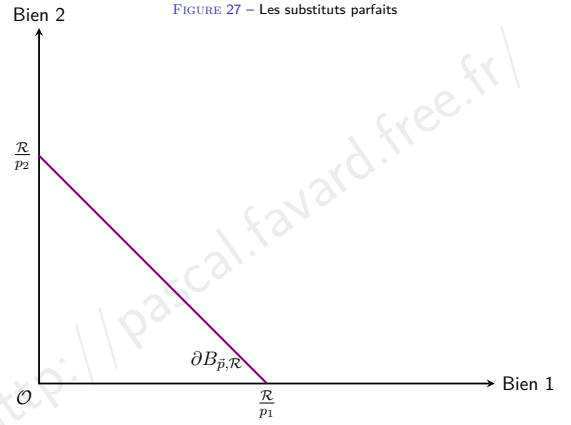


FIGURE 27 – Les substituts parfaits

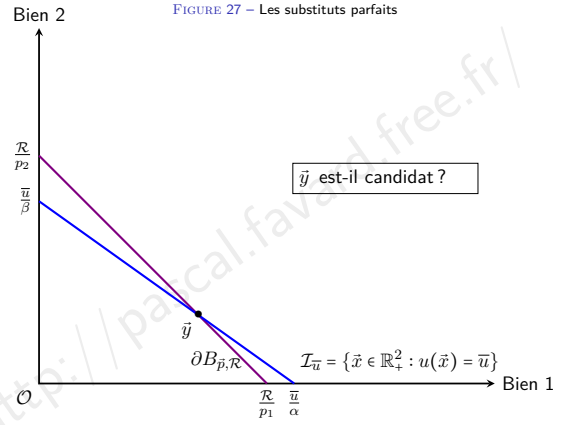


FIGURE 27 – Les substituts parfaits

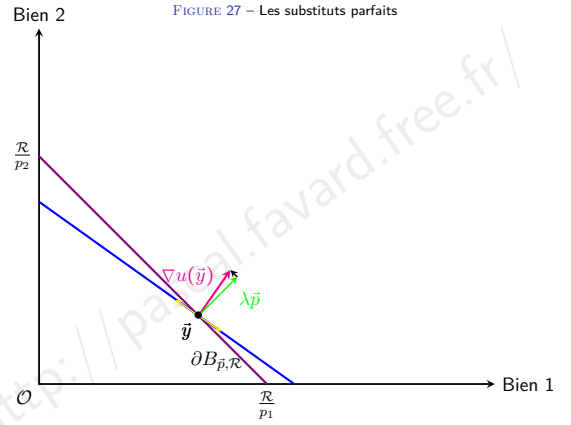
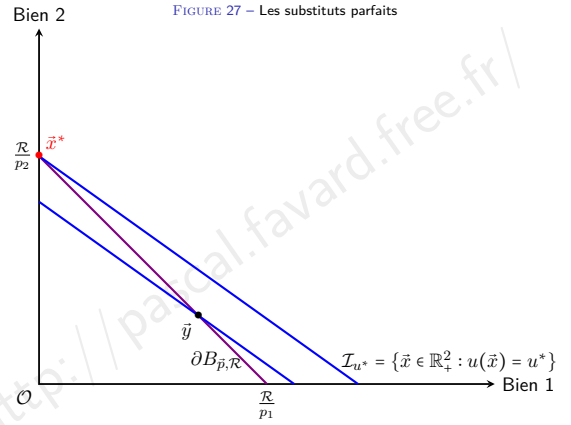


FIGURE 27 – Les substituts parfaits



http://pascal.favard.free.fr/

5. Le choix du consommateur
5.1 La maximisation de l'utilité
5.2 Statique comparative
5.3 Exemples
5.4 Fonction d'utilité indirecte

http://pascal.favard.free.fr/

Définition :

Pour tout $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ solution de $\mathscr{P}_c$ la fonction d'utilité indirecte, v, est telle que :

$$v : \begin{cases} \mathbb{R}_+^{L+1} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{p},\mathcal{R}) & \longmapsto v(\vec{p},\mathcal{R}) = u(\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})) \end{cases}$$

Proposition :

Si $u(\cdot)$ est un fonction d'utilité continue représentant un relation de préférence, $\succsim$, vérifiant la propriété de non-satiété locale définie sur $X \equiv \mathbb{R}_+^L$. Alors la fonction d'utilité indirecte, $v(\vec{p},\mathcal{R})$,vérifie les propriétés suivantes :

1. *Homogènéité de degré zéro.*
2. *Strictement croissante par rapport à $\mathcal{R}$ et non croissante par rapport aux prix des biens.*
3. *Quasi-convexité. L'ensemble $\{(\vec{p},\mathcal{R}) : v(\vec{p},\mathcal{R}) \leq \overline{v}\}$ est convexe $\forall\ \overline{v}$*
4. *Continue par rapport à $\vec{p}$ et à $\mathcal{R}$.*

Preuve : Bon exercice.

Cobb-Douglas

En utilisant (6) et en remplaçant dans $u(\cdot)$, on a :

$$v(p_1,p_2,\mathcal{R}) = A\left(\frac{\alpha\mathcal{R}}{(\alpha+\beta)p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta\mathcal{R}}{(\alpha+\beta)p_2}\right)^{\beta}$$

$$\Rightarrow v(p_1,p_2,\mathcal{R}) = A\left(\frac{\mathcal{R}}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{p_1}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{p_2}\right)^{\beta}$$

Table des matières (Diapo : 1)

1. Introduction
2. Ensemble de consommation
3. Ensemble budgétaire
4. Utilités et Préférences
4.1 Valeur subjective contre valeur objective
4.2 Utilité ordinale
4.3 Relations de préférence
4.4 Fonction d'utilité
4.5 Fonctions d'utilité particulières
5. Le choix du consommateur
5.1 La maximisation de l'utilité
5.2 Statique comparative
5.3 Exemples
5.4 Fonction d'utilité indirecte

Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

Université François-Rabelais Tours

Les chapitres : L2 & L3

1ere Partie : Choix individuels

1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique

2nde Partie : Équilibre, défaillances du marché & pouvoir de marché

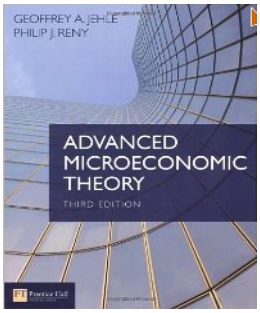
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole & monopole naturel
9. Externalité
10. Bien collectif

Chapitre 2 :

« Demande & dualité »

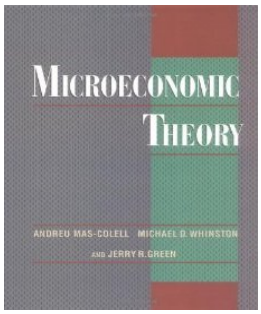
Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université

Plan

1. Introduction
2. Le dual
3. Les demandes
4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense
5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution
6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie

1. Introduction
2. Le dual
3. Les demandes
4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense
5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution
6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie

http://pascal.favard.free.fr/

1. Introduction
1.1 Hypothèses et notations
1.2 La maximisation de l'utilité

Le consommateur est un agent économique :

- qui consomme L biens divisibles, si rien n'est précisé, pour augmenter sa satisfaction
- qui a des ressources (revenus, dividendes, aides, etc.), $\mathcal{R}$
- qui est supposé, dans ce chapitre :
  - être rationnel
  - être en information complète
  - être preneur en prix
  - vivre une seule période
  - vivre en univers certain

Notations vectorielles

- $\vec{x}$ est son vecteur de consommation, appelé panier du consommateur. Le vecteur de consommation est un vecteur colonne :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix} = [x_1, x_2, .., x_i, .., x_L]^t.$$

- $\vec{p}$ est le vecteur prix des biens. Le vecteur prix est un vecteur ligne : $\vec{p} = [p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_L]$.

1. Introduction
1.1 Hypothèses et notations
1.2 La maximisation de l'utilité

Le consommateur cherche le panier de biens qui maximise son utilité sachant qu'il ne peut pas dépenser plus que ses ressources, $\mathcal{R}$, et que son ensemble de consommation, X, est $\mathbb{R}^L_+$. Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_{Consommateur} \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{x} \epsilon X\}}{\text{Max}} \; u(\vec{x}) \\ slc \; \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \mathcal{R} \end{array} \right. \tag{1}$$

La solution de $\mathscr{P}_c$, si elle existe, sera notée : $\vec{x}(\vec{p}, \mathcal{R})$. Chaque élément de ce vecteur représente la (si solution unique) consommation de j en bien i pour chaque vecteur de prix, à $\mathcal{R}$ fixé. On dira que $\vec{x}(\vec{p}, \mathcal{R})$ est la correspondance (fonction) de demande (marshallienne ou walrasienne).

1. Introduction
2. Le dual
3. Les demandes
4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense
5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution
6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie

2. Le dual
2.1 Minimisation de la dépense
2.2 Exemples

Le consommateur cherche le panier de biens qui minimise sa dépense sachant qu'il souhaite atteindre le niveau d'utilité u. Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_C \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{x} \epsilon X\}}{\text{Min}} \; \vec{p} \cdot \vec{x} \\ slc \; u(\vec{x}) \geq u \end{array} \right. \tag{2}$$

http://pascal.favard.free.fr/

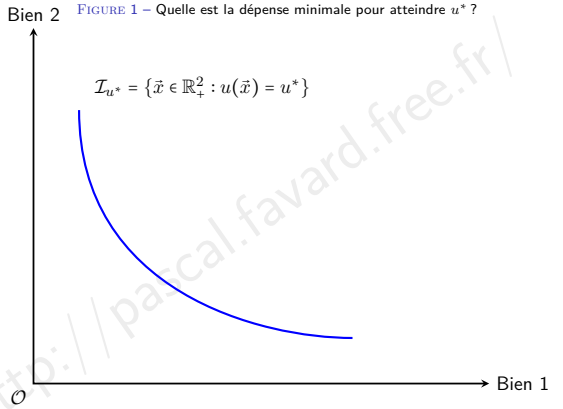


FIGURE 1 – Quelle est la dépense minimale pour atteindre u^* ?

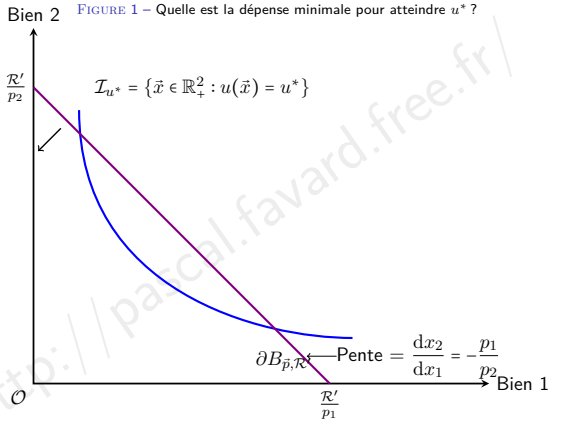


FIGURE 1 – Quelle est la dépense minimale pour atteindre u^* ?

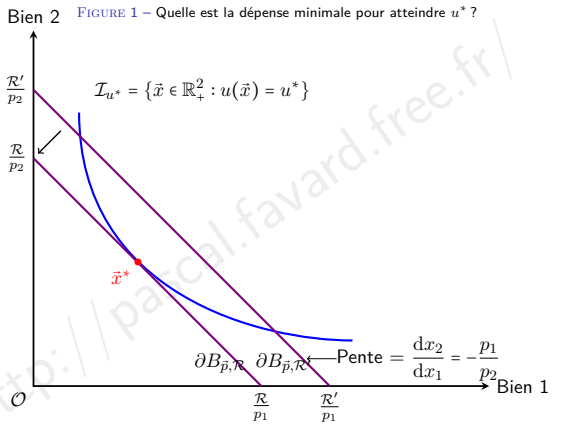


FIGURE 1 – Quelle est la dépense minimale pour atteindre u^* ?

Proposition :

Sous des hypothèses assez générales le programme (2) a au moins une solution.

Proposition :

Sous des hypothèses assez générales le programme (2) a au moins une solution.

La solution de ce programme sera notée : $\vec{h}(\vec{p}, u)$. Chaque élément de ce vecteur représente la (si solution unique) consommation de j en bien i pour chaque vecteur de prix, à niveau d'utilité, u, fixé. On dira que $\vec{h}(\vec{p}, u)$ est la correspondance (fonction) de demande hicksienne. Parfois on dit demande compensée.

Définition :

Pour tout $\vec{h}(\vec{p}, u)$ solution de (2) la fonction de dépense, e, est telle que :

$$e : \begin{cases} \mathbb{R}^{L+1}_+ & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (\vec{p}, u) & \longmapsto \quad e(\vec{p}, u) = \vec{p} \cdot \vec{h}(\vec{p}, u) \end{cases}$$

Proposition :

Si $u(\cdot)$ est une fonction d'utilité continue représentant une relation de préférence, $\succsim$, vérifiant la propriété de non-satiété locale définie sur $X \equiv \mathbb{R}^L_+$. La fonction de dépense, e, vérifie les propriétés suivantes :

1. *Homogénéité de degré un en $\vec{p}$.*
2. *Strictement croissante par rapport à u et non décroissante par rapport aux prix des biens.*
3. *Concave en $\vec{p}$.*
4. *Continue par rapport à $\vec{p}$ et à u.*

Preuve : Bon exercice.

Remarque :

Pour tout $\vec{p} \gg \vec{0}$, $\mathcal{R} > 0$ et $u > u(\vec{0})$ on a :

$$e(\vec{p}, v(\vec{p}, \mathcal{R})) = \mathcal{R} \text{ et } v(\vec{p}, e(\vec{p}, u)) = u$$

Cela implique que pour un vecteur de prix fixé $e(\cdot)$ et $v(\cdot)$ sont l'inverse l'une de l'autre.

http://pascal.favard.free.fr/

2. Le dual
2.1 Minimisation de la dépense
2.2 Exemples

Cobb-Douglas

Le meilleur choix est tel que les quantités consommées sont strictement positives. Ces quantités sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{TmS}_{12}(\vec{h}) = -\dfrac{u_{m_1}(\vec{h})}{u_{m_2}(\vec{h})} = -\dfrac{p_1}{p_2} \\ h_2 = \left(\dfrac{u}{Ah_1^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \sqrt[\beta]{\dfrac{u}{A}}\, h_1^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \mathcal{I}_u(h_1) \end{cases} \tag{3}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A\alpha h_1^{\alpha-1}h_2^{\beta}}{A\beta h_1^{\alpha}h_2^{\beta-1}} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ h_2 = \sqrt[\beta]{\dfrac{u}{A}}\, h_1^{-\frac{\alpha}{\beta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha h_2}{\beta h_1} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ h_2 = \sqrt[\beta]{\dfrac{u}{A}}\, h_1^{-\frac{\alpha}{\beta}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_1 = \dfrac{p_2\alpha h_2}{\beta p_1} \\ h_2 = \sqrt[\beta]{\dfrac{u}{A}}\, h_1^{-\frac{\alpha}{\beta}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1(p_1,p_2,u) = \left[\dfrac{u}{A}\left(\dfrac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ h_2(p_1,p_2,u) = \left[\dfrac{u}{A}\left(\dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{cases} \tag{4}$$

La fonction de dépense : la Cobb-Douglas

$$(4) \Rightarrow e_{CD}(p_1,p_2,u) = \left[\frac{u}{A}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[p_1\left(\frac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + p_2\left(\frac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

Leontief

Le meilleur choix est tel que les quantités consommées sont strictement positives. Ces quantités sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \alpha h_1 = \beta h_2 \\ A\ min\{\alpha h_1, \beta h_2\} = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1(p_1,p_2,u) = \dfrac{u}{\alpha A} \\ h_2(p_1,p_2,u) = \dfrac{u}{\beta A} \end{cases} \tag{5}$$

$$\Rightarrow e_L(p_1,p_2,u) = \frac{u}{A}\left[\frac{p_1}{\alpha} + \frac{p_2}{\beta}\right]$$

1. Introduction

2. Le dual

3. Les demandes

4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense

5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution

6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie

3. Les demandes
3.1 La courbe de demande (marshallienne, walrasienne)
3.2 La courbe de demande hicksienne
3.3 Élasticité de la demande
3.4 Exemples

Proposition :

Si $u(\cdot)$ est une fonction d'utilité continue représentant une relation de préférence, $\succsim$, vérifiant la propriété de non-satiété locale définie sur $X \equiv \mathbb{R}^L_+$. Alors la correspondance de demande walrasienne $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ vérifie les propriétés suivantes :

1. *La correspondance de demande walrasienne est homogène de degré zéro, $\vec{x}(\alpha\vec{p},\alpha\mathcal{R}) = \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R}),\ \forall(\vec{p},\mathcal{R},\alpha>0)$.*
2. *La correspondance de demande walrasienne vérifie la loi de Walras, $\vec{p}\cdot\vec{x} = \mathcal{R},\ \forall(\vec{p}\gg 0,\mathcal{R}>0,\vec{x}\in\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R}))$.*
3. *Si $u(\cdot)$ est quasi-concave ($\succsim$ convexe) alors $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ est un espace convexe.*
4. *Si $u(\cdot)$ est strictement quasi-concave ($\succsim$ strictement convexe) alors $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ est un singleton. On dira que $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ est la fonction de demande walrasienne.*

http://pascal.favard.free.fr/

Preuve :

1. Notons que $\forall \alpha > 0,\ B_{\alpha\vec{p},\alpha\mathcal{R}} = B_{\vec{p},\mathcal{R}}$, donc l'ensemble des paniers candidats ne change pas. Donc $\vec{x}(\alpha\vec{p},\alpha\mathcal{R}) = \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$, sans aucune hypothèse sur $u(\cdot)$.

2. Supposons : $\exists \vec{x} \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ tel que $\vec{p}\cdot\vec{x} < \mathcal{R}$. La non-satiété locale implique qu'il existe $\vec{y}$ suffisamment proche de $\vec{x}$ tel que $\vec{p}\cdot\vec{y} < \mathcal{R}$ et $\vec{y} \succ \vec{x}$.
Contradiction puisque $\vec{x} \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$.

3. Soit $(\vec{x} \neq \vec{y}) \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$, il faut monter que : $\vec{z} = \alpha\vec{x} + (1-\alpha\vec{y}) \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R}),\ \forall \alpha \in [0,1]$. Nous savons que $u(\vec{y}) = u(\vec{x}) = u^\star$, puisque $u(\cdot)$ est quasi-concave $u(\vec{z}) \geq u^\star$.
De plus on a $\vec{p}\cdot\vec{x} \leq \mathcal{R}$ et $\vec{p}\cdot\vec{y} \leq \mathcal{R}$ donc $\vec{p}\cdot\vec{z} \leq \mathcal{R}$. $\vec{z}$ est donc accessible financièrement et comme $u(\vec{z}) \geq u^\star$ alors $\vec{z} \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$.
$\Rightarrow \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ est un ensemble convexe.

4. Si $u(\cdot)$ est strictement quasi-concave, même démonstration que ci-dessus, sauf qu'à présent $u(\vec{z}) > u^\star$. Ce qui contredit le fait que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ soit des points solutions. L'ensemble des solutions est donc un singleton.■

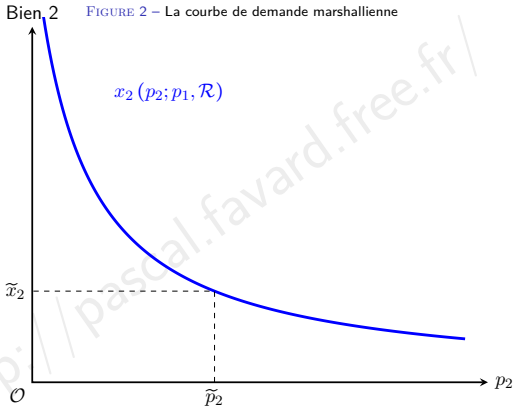


Figure 2 – La courbe de demande marshallienne

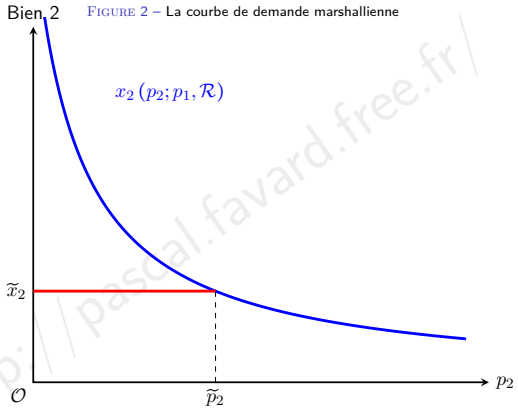


Figure 2 – La courbe de demande marshallienne

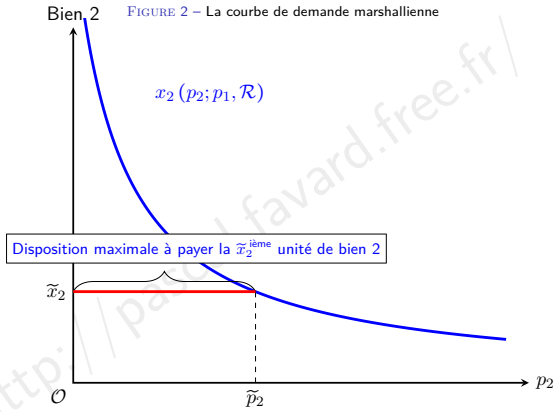


Figure 2 – La courbe de demande marshallienne

3. Les demandes
3.1 La courbe de demande (marshallienne, walrasienne)
3.2 La courbe de demande hicksienne
3.3 Élasticité de la demande
3.4 Exemples

Proposition :

Si $u(\cdot)$ est un fonction d'utilité continue représentant un relation de préférence, $\succsim$, vérifiant la propriété de non-satiété locale définie sur $X \equiv \mathbb{R}^L_+$ et $\vec{p} \gg \vec{0}$, on a les propriétés suivantes :

1. *si $\vec{x}^\star \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ lorsque $\mathcal{R} > 0$, alors $\vec{x}^\star$ est solution de (2) lorsque $u = u(\vec{x}^\star)$ et la dépense minimale est $\mathcal{R}$,*
2. *si $\vec{x}^\star \in \vec{h}(\vec{p},u)$ est solution de (2) pour un niveau d'utilité $u > u(\vec{0})$, alors $\vec{x}^\star \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ lorsque les ressources sont $\vec{p}\cdot\vec{x}^\star$. De plus le niveau d'utilité atteint dans $\mathscr{P}_c$ est u.*

Preuve : Bon exercice.

Proposition :

Si $u(\cdot)$ est un fonction d'utilité continue représentant un relation de préférence, $\succsim$, vérifiant la propriété de non-satiété locale définie sur $X \equiv \mathbb{R}^L_+$. Si $\vec{p} \gg \vec{0}$, alors la correspondance de demande hicksienne, $\vec{h}(\vec{p},u)$, vérifie les propriétés suivantes :

1. *homogénéité de degré zéro par rapport à $\vec{p}$,*
2. *pas d'utilité excédentaire, pour tout $\vec{x} \in \vec{h}(\vec{p},u)$, $u(\vec{x}) = u$,*
3. *convexité, si $\succsim$ est quasi-concave.*

Preuve : Bon exercice.

http://pascal.favard.free.fr/

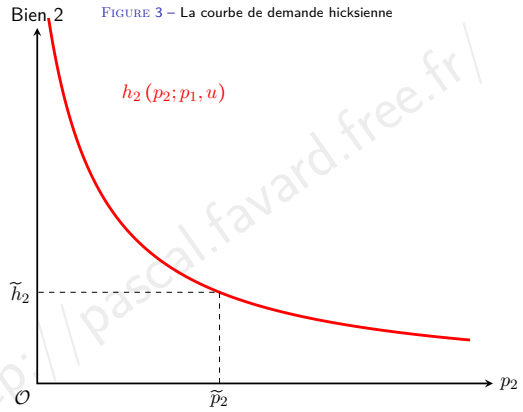


FIGURE 3 – La courbe de demande hicksienne

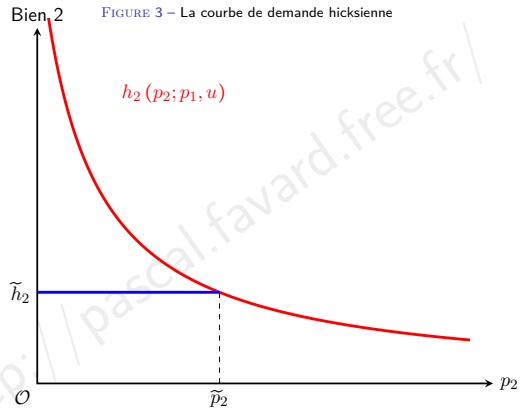


FIGURE 3 – La courbe de demande hicksienne

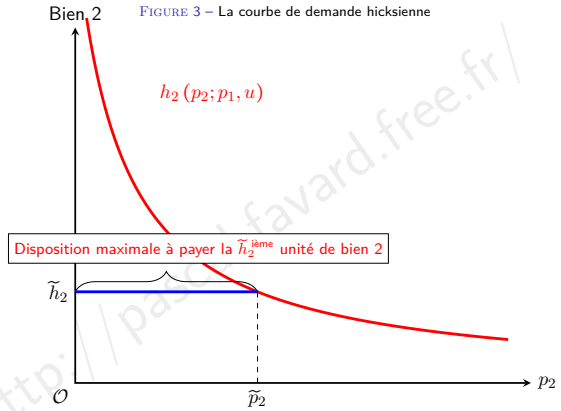


FIGURE 3 – La courbe de demande hicksienne

3. Les demandes
3.1 La courbe de demande (marshallienne, walrasienne)
3.2 La courbe de demande hicksienne
3.3 Élasticité de la demande
3.4 Exemples

Bonne ou mauvaise question

1. Quel est l'impact sur la demande de lait d'une augmentation du prix unitaire du lait de 5cts ?
2. Quel est l'impact sur la demande de lait d'une augmentation de 1% du prix unitaire du lait ?

Définition :

On appellera :

1. *élasticité prix (croisés) :*

$$\varepsilon_{\ell,p_k}(\vec{p},\mathcal{R}) = \frac{\partial x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial p_k}\frac{p_k}{x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})},$$

2. *élasticité revenu :*

$$\varepsilon_{\ell,\mathcal{R}}(\vec{p},\mathcal{R}) = \frac{\partial x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial \mathcal{R}}\frac{\mathcal{R}}{x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}.$$

Remarque : L'élasticité donne la variation en pourcentage de la quantité de bien ℓ demandée lorsque le prix du bien k ou le revenu varie de 1%, cette quantité est indépendante des unités. Concept local !

Élasticité prix : $\varepsilon_{\ell,p_\ell}(\vec{p},\mathcal{R}) = \begin{cases} < 0 & \text{ordinaire, typique,} \\ > 0 & \text{de Giffen (première nécessité),} \\ & \text{ou de Veblen (luxe).} \end{cases}$

Élasticité prix-croisés $(k \neq \ell)$: $\varepsilon_{\ell,p_k}(\vec{p},\mathcal{R}) = \begin{cases} < 0 & \text{complémentaires,} \\ > 0 & \text{substituables.} \end{cases}$

Élasticité revenu : $\varepsilon_{\ell,\mathcal{R}}(\vec{p},\mathcal{R}) = \begin{cases} < 0 & \text{inférieur,} \\ \in [0,1] & \text{normal,} \\ > 1 & \text{supérieur.} \end{cases}$

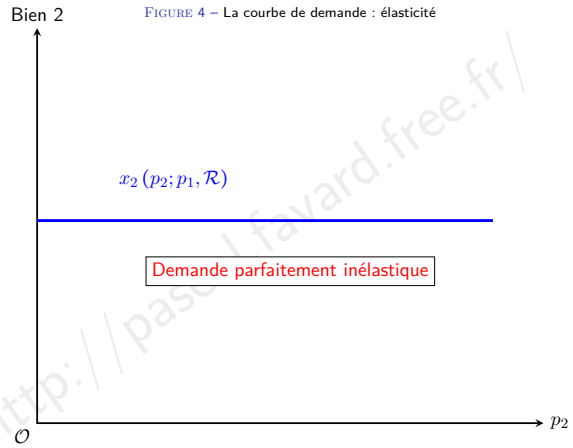
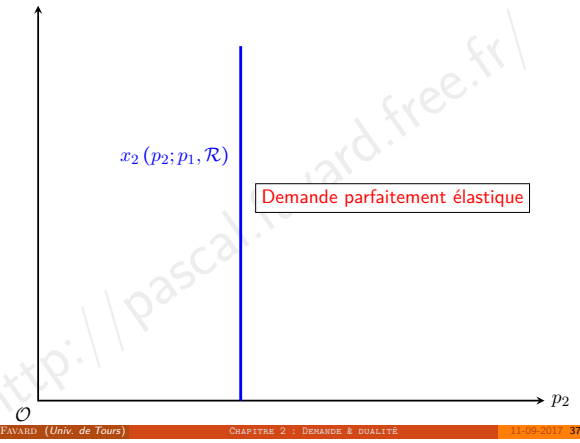


FIGURE 4 – La courbe de demande : élasticité

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 4 – La courbe de demande : élasticité



3. Les demandes
3.1 La courbe de demande (marshallienne, walrasienne)
3.2 La courbe de demande hicksienne
3.3 Élasticité de la demande
3.4 Exemples

Demande marshallienne : Cobb-Douglas

$$\begin{cases} x_1(p_1; \mathcal{R}) = \dfrac{\alpha \mathcal{R}}{(\alpha+\beta)p_1} \\ x_2(p_2; \mathcal{R}) = \dfrac{\beta \mathcal{R}}{(\alpha+\beta)p_2} \end{cases} \tag{6}$$

Élasticité prix : $\varepsilon_{1,p_1}(\vec{p}, \mathcal{R}) = \dfrac{\partial x_1(p_1; \mathcal{R})}{\partial p_1} \dfrac{p_1}{x_1(p_1; \mathcal{R})} = -1 = \varepsilon_{2,p_2}(\vec{p}, \mathcal{R}) < 0$

Élasticité prix-croisés :
$\varepsilon_{1,p_2}(\vec{p}, \mathcal{R}) = \dfrac{\partial x_1(p_1; \mathcal{R})}{\partial p_2} \dfrac{p_2}{x_1(p_1; \mathcal{R})} = 0 = \varepsilon_{2,p_1}(\vec{p}, \mathcal{R})$

Élasticité revenu : $\varepsilon_{1,\mathcal{R}}(\vec{p}, \mathcal{R}) = \dfrac{\partial x_1(p_1; \mathcal{R})}{\partial \mathcal{R}} \dfrac{\mathcal{R}}{x_1(p_1; \mathcal{R})} = 1 = \varepsilon_{2,\mathcal{R}}(\vec{p}, \mathcal{R})$

Demande hicksienne : Cobb-Douglas

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_1(p_1; p_2, u) = \left[\dfrac{u}{A}\left(\dfrac{\alpha p_2}{\beta p_1}\right)^{\beta}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ h_2(p_2; p_1, u) = \left[\dfrac{u}{A}\left(\dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{cases}$$

FIGURE 5 – LeS courbeS de demande

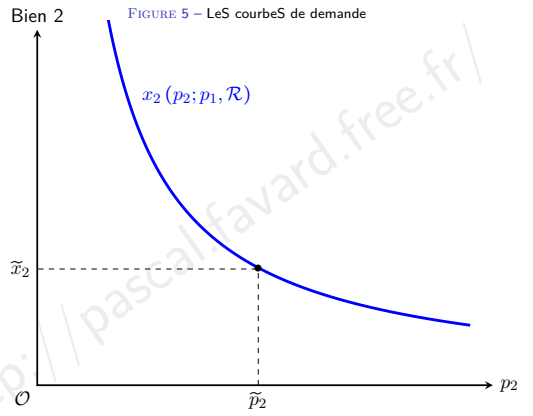
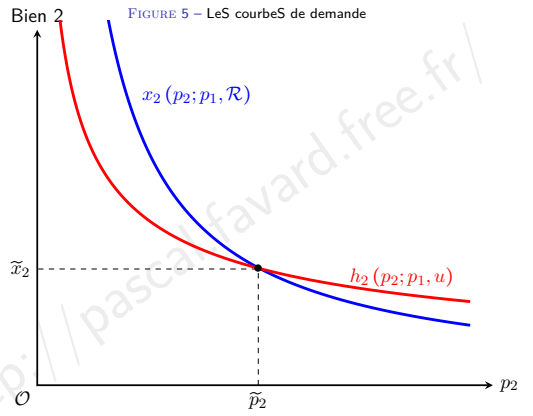


FIGURE 5 – LeS courbeS de demande



Leontief

$$\begin{cases} x_1(p_1; p_2, \mathcal{R}) = \dfrac{\beta \mathcal{R}}{\beta p_1 + \alpha p_2} \\ x_2(p_2; p_1, \mathcal{R}) = \dfrac{\alpha \mathcal{R}}{\beta p_1 + \alpha p_2} \end{cases} \tag{7}$$

Élasticité prix : $\varepsilon_{1,p_1}(\vec{p}, \mathcal{R}) = -\dfrac{\beta p_1}{\beta p_1 + \alpha p_2} \neq \varepsilon_{2,p_2}(\vec{p}, \mathcal{R}) < 0$

Élasticité prix-croisés : $\varepsilon_{1,p_2}(\vec{p}, \mathcal{R}) = -\dfrac{\alpha p_2}{\beta p_1 + \alpha p_2} \neq \varepsilon_{2,p_1}(\vec{p}, \mathcal{R}) < 0$

Élasticité revenu : $\varepsilon_{1,\mathcal{R}}(\vec{p}, \mathcal{R}) = 1 = \varepsilon_{2,\mathcal{R}}(\vec{p}, \mathcal{R})$

Demande hicksienne : Leontief

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h_1(p_1; p_2, u) = \dfrac{u}{\alpha A} \\ h_2(p_2; p_1, u) = \dfrac{u}{\beta A} \end{cases}$$

http://pascal.favard.free.fr/

1. Introduction

2. Le dual

3. Les demandes

4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense

5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution

6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie

Proposition :

Si $u(\cdot)$ est une fonction d'utilité continue représentant une relation de préférence, $\succsim$, vérifiant la propriété de non-satiété locale définie sur $X \equiv \mathbb{R}^L_+$ alors :

$$\vec{h}(\vec{p},u) = \nabla_{\vec{p}}\, e(\vec{p},u).$$

Donc, $h_\ell(\vec{p},u) = \dfrac{\partial e(\vec{p},u)}{\partial p_\ell}$ *pour tout* $\ell = 1,..,L$.

Preuve : Bon exercice.

4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense
4.1 Demande hicksienne et fonction de dépense
4.2 Demande hicksienne et demande walrasienne
4.3 Demande walrasienne et fonction d'utilité indirecte

Equation de Slutsky

Proposition :

Si $u(\cdot)$ est une fonction d'utilité continue représentant une relation de préférence, $\succsim$, vérifiant la propriété de non-satiété locale définie sur $X \equiv \mathbb{R}^L_+$, alors :

$$D_{\vec{p}}\left[\vec{h}(\vec{p},u)\right] = D_{\vec{p}}\left[\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})\right] + D_{\mathcal{R}}\left[\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})\right]{}^t\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R}).$$

Donc on a, $\dfrac{\partial h_\ell(\vec{p},u)}{\partial p_k} = \dfrac{\partial x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial p_k} + \dfrac{\partial x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial \mathcal{R}} x_k(\vec{p},\mathcal{R})$ *pour tout* $\ell = 1,..,L$ *et pour tout* $k = 1,..,L$.

Preuve : Bon exercice.

4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense
4.1 Demande hicksienne et fonction de dépense
4.2 Demande hicksienne et demande walrasienne
4.3 Demande walrasienne et fonction d'utilité indirecte

Effet revenu - Effet substitution

Équation de Slutsky :

$$\frac{\partial h_\ell(\vec{p},u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial p_k} + \frac{\partial x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial \mathcal{R}} x_k(\vec{p},\mathcal{R})$$

$$\Rightarrow \Delta x_\ell \approx \frac{\partial x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial p_k}\Delta p_k = \overbrace{\frac{\partial h_\ell(\vec{p},u)}{\partial p_k}\Delta p_k}^{\text{Effet Substitution}} - \overbrace{\frac{\partial x_\ell(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial \mathcal{R}} x_k(\vec{p},\mathcal{R})\Delta p_k}^{\text{Effet Revenu}}$$

4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense
4.1 Demande hicksienne et fonction de dépense
4.2 Demande hicksienne et demande walrasienne
4.3 Demande walrasienne et fonction d'utilité indirecte

Identité de Roy

René François-Joseph Roy (1894-1977)

Proposition :

Soit $u(\cdot)$ une fonction d'utilité continue représentant une relation de préférence, $\succsim$, vérifiant la propriété de non-satiété locale définie sur $X \equiv \mathbb{R}^L_+$. Supposons que la fonction d'utilité indirecte v soit $\mathcal{C}$. On a :

$$\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R}) = -\nabla_{\mathcal{R}}^{-1} v(\vec{p},\mathcal{R})\nabla_{\vec{p}} v(\vec{p},\mathcal{R}).$$

Donc on a, $x_\ell(\vec{p},\mathcal{R}) = -\dfrac{\dfrac{\partial v(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial p_\ell}}{\dfrac{\partial v(\vec{p},\mathcal{R})}{\partial \mathcal{R}}}$, *pour tout* $\ell = 1,..,L$.

Preuve : Bon exercice.

http://pascal.favard.free.fr/

1. Introduction

2. Le dual

3. Les demandes

4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense

5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution

6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie

5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution

5.1 Effet substitution au sens de Hicks

5.2 Effet substitution au sens de Slutsky

FIGURE 6 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

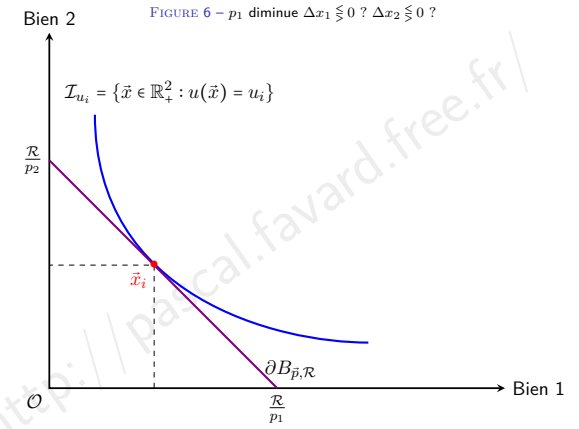


FIGURE 6 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

FIGURE 6 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

FIGURE 6 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

FIGURE 6 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

FIGURE 6 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

http://pascal.favard.free.fr/

Pour déterminer $\widetilde{x}$ il suffit de résoudre le système à trois équations et trois inconnues $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \mathcal{R}')$ suivant :

$$\begin{cases} p_1'\widetilde{x}_1 + p_2\widetilde{x}_2 = \mathcal{R}', \\ u(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = u(x_{i1}, x_{i2}) = u_i, \\ \mathrm{TmS}_{12}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = -\dfrac{p_1'}{p_2}. \end{cases} \tag{8}$$

Proposition :

L'effet substitution est toujours du signe contraire à celui de la variation de prix.

Type de bien

$\Delta p_\ell < 0$			
Bien ℓ	ES	ER	ET
Normal	+	+	+
Inférieur		−	+
Giffen			−

$\Delta p_\ell > 0$			
Bien ℓ	ES	ER	ET
Normal	−	−	−
Inférieur		+	−
Giffen			+

Table 1 – Type de bien

5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution
5.1 Effet substitution au sens de Hicks
5.2 Effet substitution au sens de Slutsky

Figure 7 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

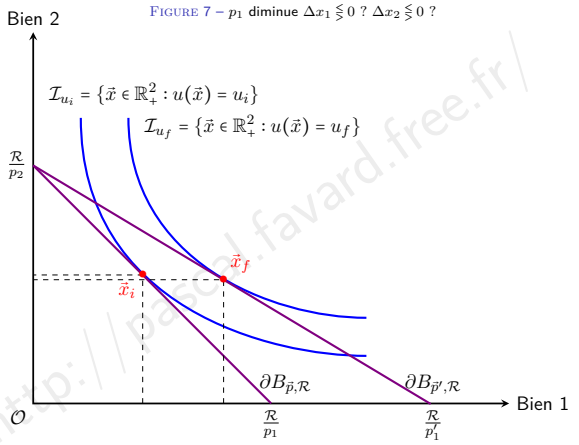


Figure 7 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

Figure 7 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

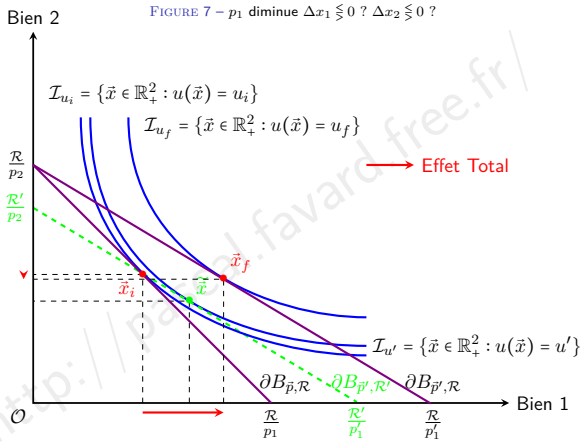
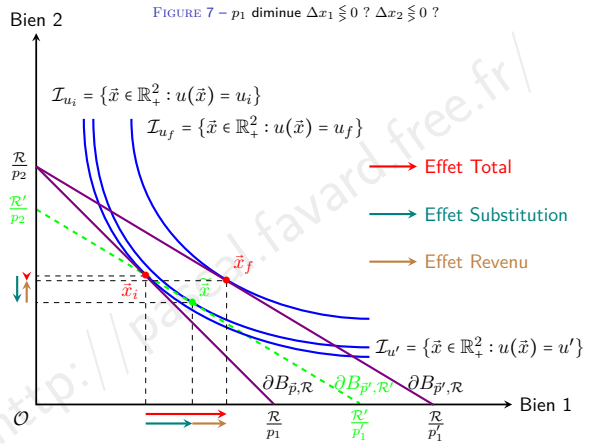


Figure 7 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 7 – p_1 diminue $\Delta x_1 \lesseqgtr 0$? $\Delta x_2 \lesseqgtr 0$?



Pour déterminer $\widetilde{x}$ il suffit de résoudre le système à trois équations et trois inconnues $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \mathcal{R}')$ suivant :

$$\begin{cases} p'_1\widetilde{x}_1 + p_2\widetilde{x}_2 = \mathcal{R}', \\ p'_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} = \mathcal{R}', \\ \mathrm{TmS}_{12}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) = -\dfrac{p'_1}{p_2}. \end{cases} \tag{9}$$

Proposition :

L'effet substitution est toujours du signe contraire à celui de la variation de prix.

Type de bien

$\Delta p_\ell < 0$			
Bien ℓ	ES	ER	ET
Normal	+	+	+
Inférieur		−	+
Giffen			−

$\Delta p_\ell > 0$			
Bien ℓ	ES	ER	ET
Normal	−	−	−
Inférieur		+	−
Giffen			+

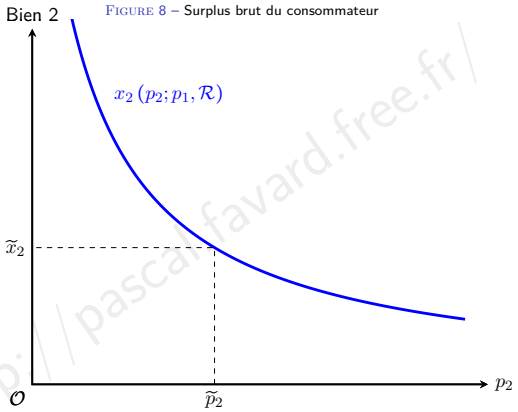
TABLE 2 – Type de bien

1. Introduction
2. Le dual
3. Les demandes
4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense
5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution
6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie

6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie
6.1 Le surplus
6.2 Utilité marginale du revenu non-constante

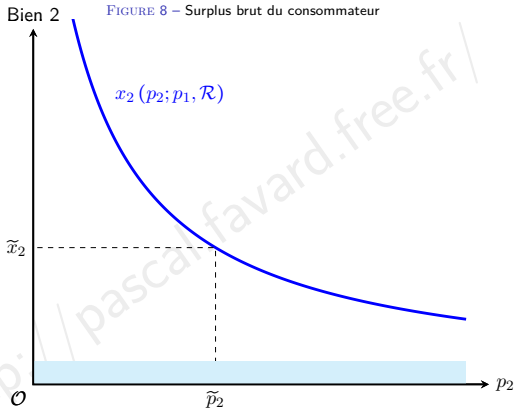
6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie
6.1 Le surplus
- Le surplus brut du consommateur
- Le surplus net du consommateur
- Le variation de surplus
6.2 Utilité marginale du revenu non-constante

FIGURE 8 – Surplus brut du consommateur



Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie | Le surplus

FIGURE 8 – Surplus brut du consommateur



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 8 – Surplus brut du consommateur

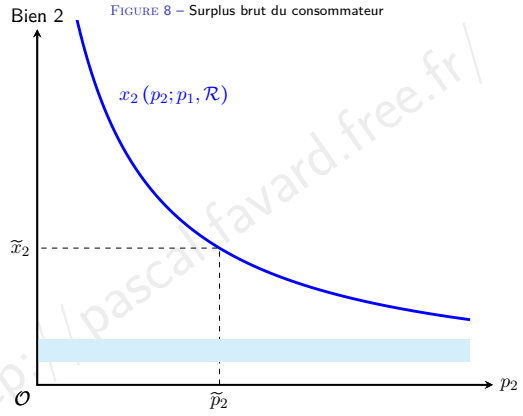


FIGURE 8 – Surplus brut du consommateur

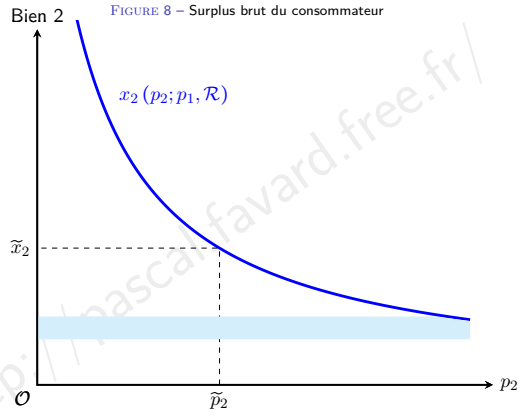


FIGURE 8 – Surplus brut du consommateur

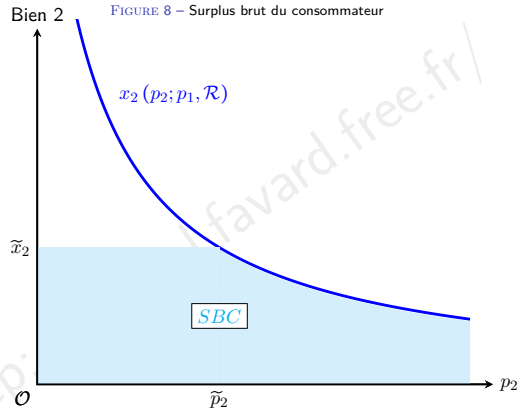


FIGURE 9 – Demande inverse : Surplus brut du consommateur

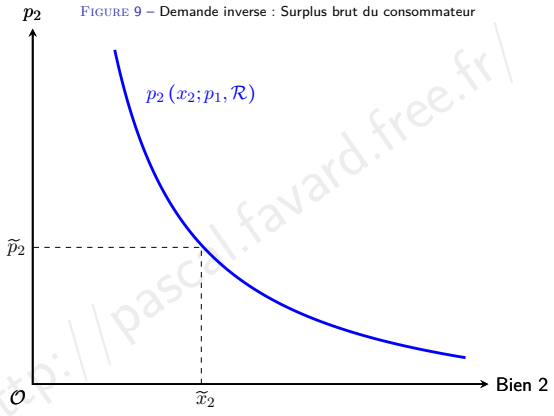
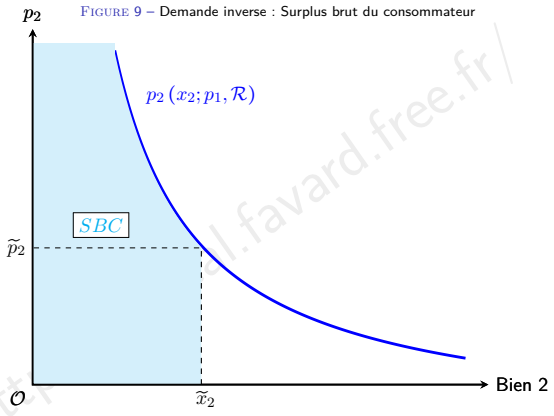


FIGURE 9 – Demande inverse : Surplus brut du consommateur

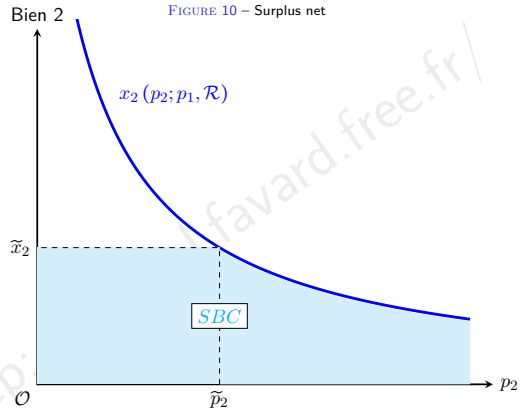


Calcul du surplus brut du consommateur

- Il faut que la surface qui représente le surplus soit finie (i.e. l'intégrale existe).
- $SBC = \int_0^{\widetilde{x}_2} p_2(x_2; p_1, \mathcal{R})\, \mathrm{d}x_2$
- SBC c'est donc une mesure de la disposition maximale à payer du consommateur pour consommer x_2 unités de bien 2.

6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie
6.1 Le surplus
- Le surplus brut du consommateur
- Le surplus net du consommateur
- Le variation de surplus
6.2 Utilité marginale du revenu non-constante

FIGURE 10 – Surplus net



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 10 – Surplus net

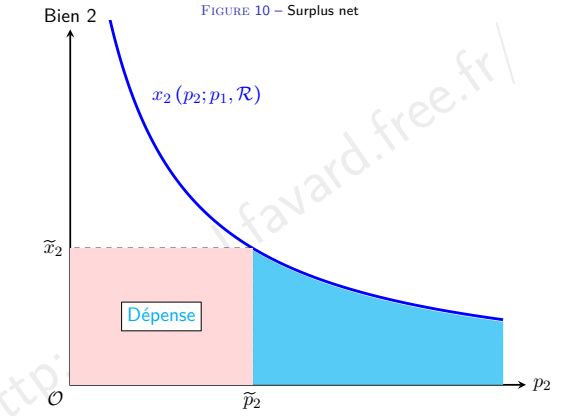


FIGURE 10 – Surplus net

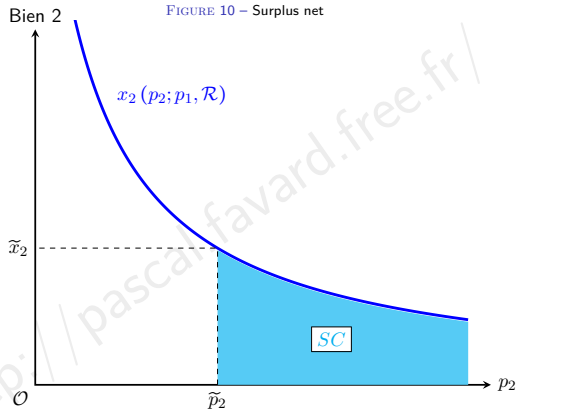


FIGURE 11 – Demande inverse : Surplus net du consommateur

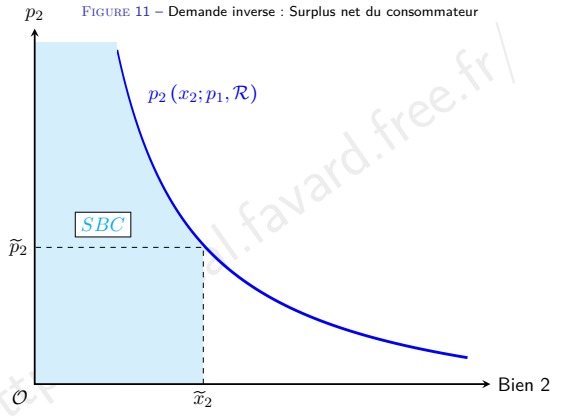


FIGURE 11 – Demande inverse : Surplus net du consommateur

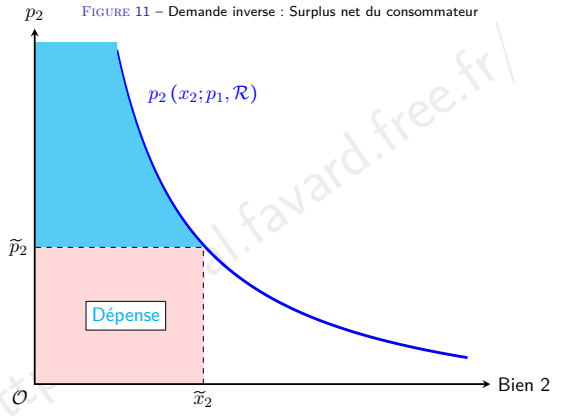
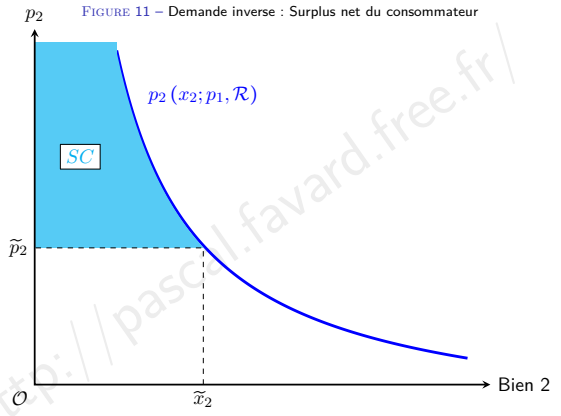


FIGURE 11 – Demande inverse : Surplus net du consommateur



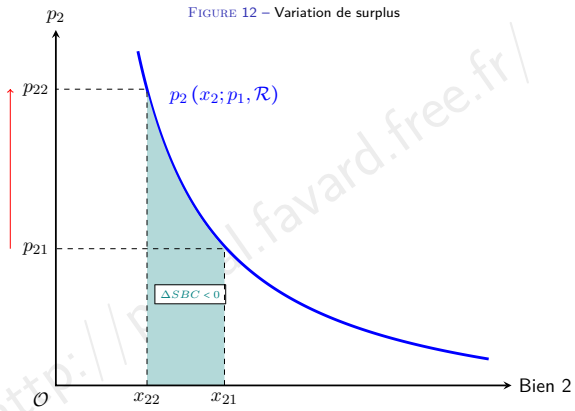
Calcul du surplus net du consommateur

- Il faut que le surplus brut soit fini (i.e. l'intégrale existe).
- $SC = SBC - [\widetilde{p}_2\ \widetilde{x}_2]$
- SC est donc une « mesure du bénéfice » que retire le consommateur de la consommation de x_2 unités de bien 2.

6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie
6.1 Le surplus
- Le surplus brut du consommateur
- Le surplus net du consommateur
- Le variation de surplus

6.2 Utilité marginale du revenu non-constante

FIGURE 12 – Variation de surplus



http://pascal.favard.free.fr/

Calcul de la variation de surplus

- $\Delta SBC = -\int_{x_{22}}^{x_{21}} p_2\left(x_2; p_1, \mathcal{R}\right) \mathrm{d}x_2$
- $\Delta SC = \Delta SBC + \left[x_{21} - x_{22}\right] p_{21}$.
- On a donc associé une valeur monétaire (la variation de surplus) a un changement de bien-être du (des) consommateur (s) dû à une variation de prix.

Variation de surplus $\stackrel{?}{=}$ variation d'utilité

- En général : variation de surplus $\neq$ variation d'utilité.
- Fonctions d'utilités quasi-linéaires.

$$\mathscr{P}_{Consommateur} \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{x}\epsilon X\}}{\text{Max}}\ u(\vec{x}) \\ slc\ \vec{p}\cdot\vec{x} \leq \mathcal{R} \end{array} \right. \tag{10}$$

$$\mathscr{P}_{Consommateur} \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{x}\epsilon X\}}{\text{Max}}\ x_1 + W(\vec{x}_{L-1}) \\ slc\ \vec{p}\cdot\vec{x} \leq \mathcal{R} \end{array} \right. \tag{11}$$

$$\mathscr{P}_{Consommateur} \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{x}\epsilon X\}}{\text{Max}}\ x_1 + \sum_{i=2}^{L} v_i(x_i) \\ slc\ \vec{p}\cdot\vec{x} \leq \mathcal{R} \end{array} \right. \tag{12}$$

6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie
6.1 Le surplus
6.2 Utilité marginale du revenu non-constante

http://pascal.favard.free.fr/

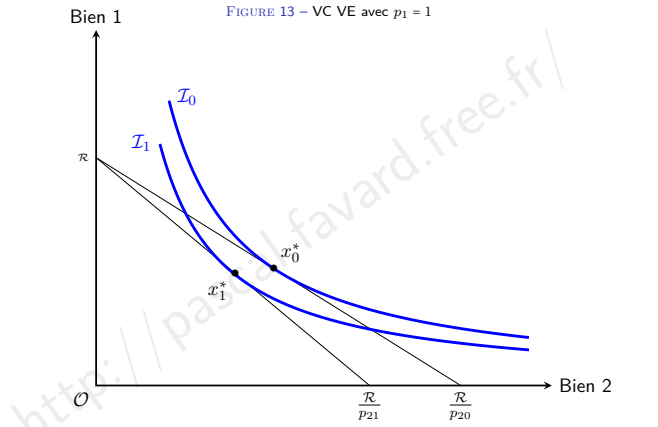
- Somme minimale que l'on doit donner au consommateur pour compenser la perte de bien-être due à une hausse du prix du bien 2.
- $VC = e(p_{21}, p_1, u_0) - e(p_{20}, p_1, u_0)$

$\Leftrightarrow\ v(p_{21}, p_1, \mathcal{R}_0 + VC) = v(p_{20}, p_1, \mathcal{R}_0)$

- Somme maximale que le consommateur est prêt à payer pour éviter la hausse du prix du bien 2.
- $VE = e(p_{21}, p_1, u_1) - e(p_{20}, p_1, u_1)$

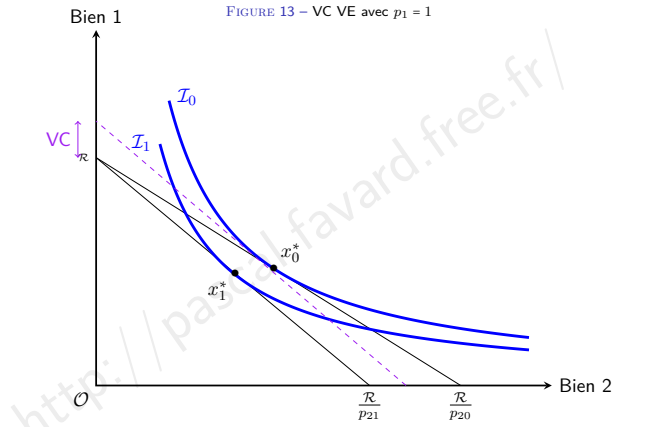
$\Leftrightarrow\ v(p_{20}, p_1, \mathcal{R}_1 - VE) = v(p_{21}, p_1, \mathcal{R}_1)$

FIGURE 13 – VC VE avec $p_1 = 1$



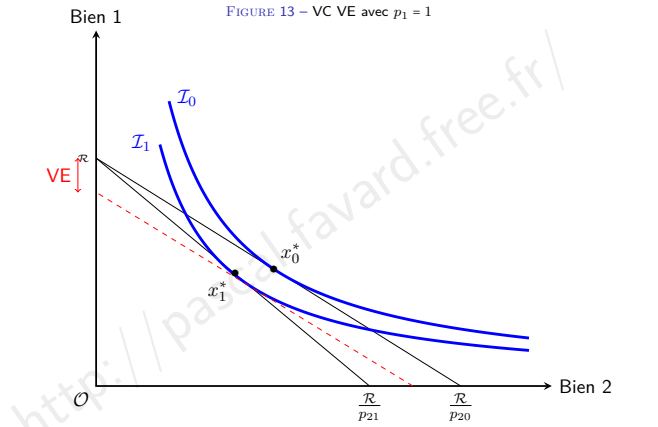
http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 13 – VC VE avec $p_1 = 1$



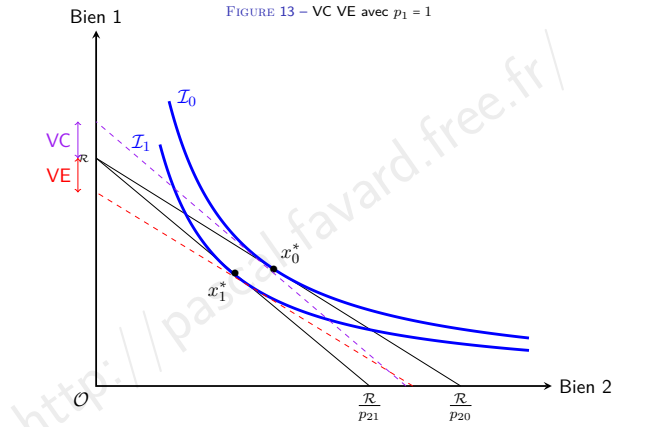
http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 13 – VC VE avec $p_1 = 1$



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 13 – VC VE avec $p_1 = 1$



http://pascal.favard.free.fr/

Table des matières (Diapo : 1)

1. Introduction
1.1 Hypothèses et notations
1.2 La maximisation de l'utilité

2. Le dual
2.1 Minimisation de la dépense
2.2 Exemples

3. Les demandes
3.1 La courbe de demande (marshallienne, walrasienne)
3.2 La courbe de demande hicksienne
3.3 Élasticité de la demande
3.4 Exemples

4. Relations entre demandes, utilité indirecte et dépense
4.1 Demande hicksienne et fonction de dépense
4.2 Demande hicksienne et demande walrasienne

Table des matières (Diapo : 2)

4.3 Demande walrasienne et fonction d'utilité indirecte

5. Décomposition : Effet revenu-Effet substitution
5.1 Effet substitution au sens de Hicks
5.2 Effet substitution au sens de Slutsky

6. Variation du niveau d'utilité lorsqu'un prix varie
6.1 Le surplus
- Le surplus brut du consommateur
- Le surplus net du consommateur
- Le variation de surplus

6.2 Utilité marginale du revenu non-constante
- Variation compensatoire
- Variation équivalente

Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

Université François-Rabelais Tours

Les chapitres : L2 & L3

1ere Partie : Choix individuels

1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique

2nde Partie : Équilibre, défaillances du marché & pouvoir de marché

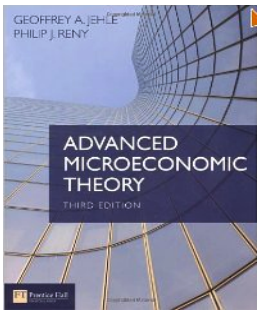
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole & monopole naturel
9. Externalité
10. Bien collectif

Chapitre 3 :

« Producteur »

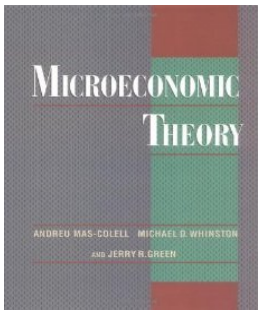
Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université

Plan

1. Introduction
2. Ensemble de production
3. Le programme du producteur

1. Introduction
2. Ensemble de production
3. Le programme du producteur

http://pascal.favard.free.fr/

Les questions pertinentes sur l'entreprise :

- qui la possède ?
- qui la dirige ?
- comment est-elle dirigée ?
- comment est-elle organisée ?
- que peut-elle faire ?
  - quantités
  - qualités
  - prix
  - R&D

Le processus de production

Inputs :

- Travail
- Capital
- Biens intermédiaires

$\Longrightarrow$ Boite noire $\Longrightarrow$ Outputs

Long terme Vs Court terme

Définition :

- *À court terme, au moins, une quantité d'input utilisée par le producteur est fixée quel que soit le niveau de production.*
- *À long terme toutes les quantités d'inputs utilisées sont ajustables.*

Le producteur est un agent économique :

- dans une économie où il y a L biens divisibles, si rien n'est précisé.
- qui est supposé, dans ce chapitre :
  - être efficace
  - être en information complète
  - être preneur en prix
  - « vivre » une seule période
  - « vivre » en univers certain

Notations vectorielles

- $\vec{y}$ est son vecteur de production (vecteur input-output). Le vecteur de production est un vecteur colonne :

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\ell \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix} = [y_1, y_2, .., y_\ell, .., y_L]^t.$$

- $\vec{p}$ est le vecteur prix des biens. Le vecteur prix est un vecteur ligne : $\vec{p} = [p_1, p_2, ..., p_\ell, ..., p_L] \gg 0$.

Pourquoi étudier le comportement du producteur ? Pour déterminer comment :

- une variation des prix unitaires modifie ses décisions et son profit,
- un changement technologique modifie ses décisions et son profit,
- une intervention de l'État modifie ses décisions et son profit.

1. Introduction

2. Ensemble de production

3. Le programme du producteur

L'ensemble de production, Y, d'une entreprise est l'ensemble des vecteurs de production technologiquement possibles. Dans certains cas, il faut rajouter des contraintes institutionnelles, ou des contrats ex-ante. On a $Y \subseteq \mathbb{R}^L$.

La fonction de transformation, $F(\cdot)$, a la propriété suivante :

$$Y = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^L : F(\vec{y}) \leq 0\}.$$

La frontière de transformation est l'ensemble des points, tels que :

$$Y = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^L : F(\vec{y}) = 0\}.$$

http://pascal.favard.free.fr/

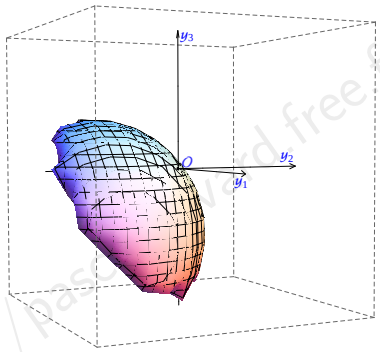


FIGURE 1 – Ensemble de production

Taux marginal de Transformation : TmT

Supposons $F(\cdot)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\vec{y}$ vérifie $F(\vec{y}) = 0$.

Le long de la frontière de transformation on a :

$$\frac{\partial F(\vec{y})}{\partial y_k}\mathrm{d}y_k + \frac{\partial F(\vec{y})}{\partial y_\ell}\mathrm{d}y_\ell = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{TmT}_{\ell k}(\vec{y}) = \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}y_\ell} = -\frac{\dfrac{\partial F(\vec{y})}{\partial y_\ell}}{\dfrac{\partial F(\vec{y})}{\partial y_k}}.$$

De combien varie l'output « net » du bien k lorsque le producteur utilise une unité de plus de l'output « net » de bien ℓ.

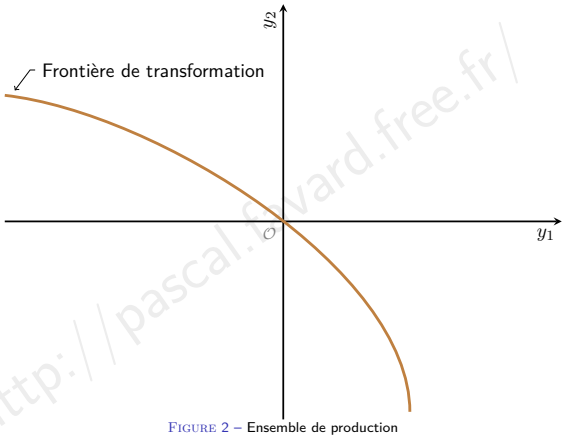


FIGURE 2 – Ensemble de production

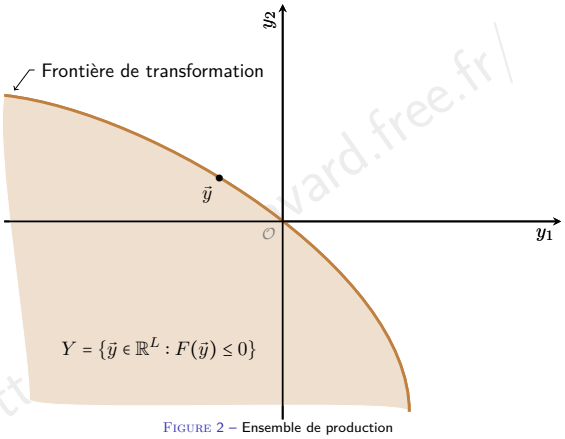


FIGURE 2 – Ensemble de production

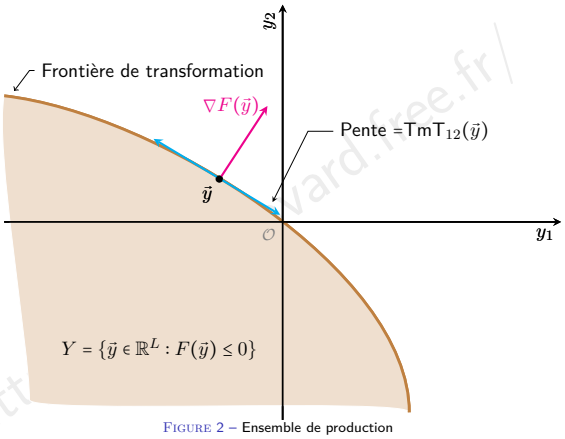


FIGURE 2 – Ensemble de production

2. Ensemble de production
2.1 Propriétés de l'ensemble de production
2.2 Cas particulier : Inputs Outputs distincts

- P1 : Y est non vide $\Rightarrow$ L'entreprise peut produire quelque chose si elle le souhaite.
- P2 : Y est fermé : La frontière de Y est dans Y.
- P3 : « Libre disposition » (Free disposal) : si $\vec{y}' \underline{\ll} \vec{y} \in Y$, alors $\vec{y}' \in Y$.

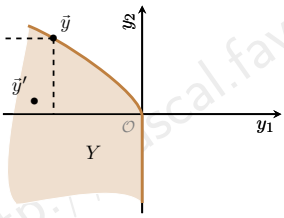


FIGURE 3 – Libre disposition

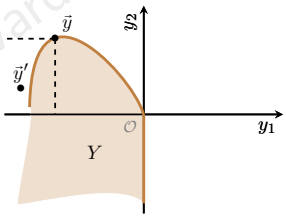


FIGURE 4 – ~~Libre disposition~~

- P4 : « No free lunch » : $Y \cap \mathbb{R}^L_+ \subset \{\vec{o} \cup \varnothing\}$.

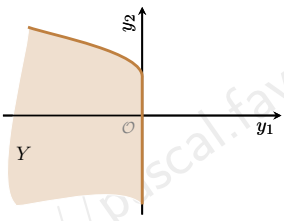


FIGURE 5 – Free Lunch

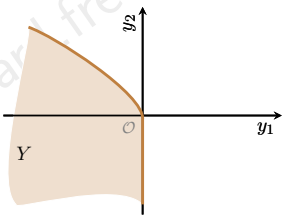


FIGURE 6 – ~~Free Lunch~~

http://pascal.favard.free.fr/

- P5 : Possibilité de ne rien produire : $\{\vec{o}\} \in Y$.

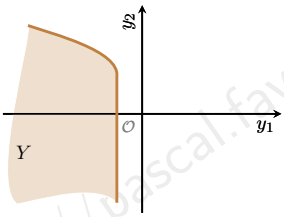


FIGURE 7 – Coûts irrécupérables

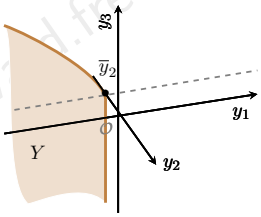


FIGURE 8 – y_2 fixée

- P6 : Rdts non croissants à l'échelle : $\forall \vec{y} \in Y, \forall \alpha \in [0,1] : \alpha\vec{y} \in Y$.

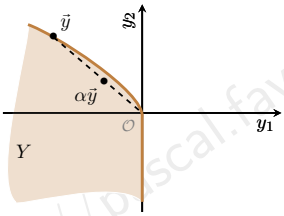


FIGURE 9 – Rdts non croissants

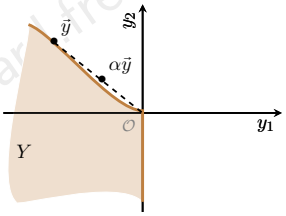


FIGURE 10 – ~~Rdts non croissants~~

- P7 : Rdts non décroissants à l'échelle : $\forall \vec{y} \in Y, \forall \alpha \geq 1 : \alpha\vec{y} \in Y$.

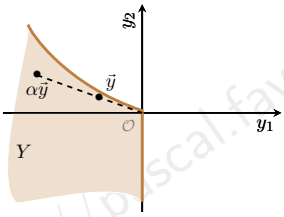


FIGURE 11 – Rdts non décroissants

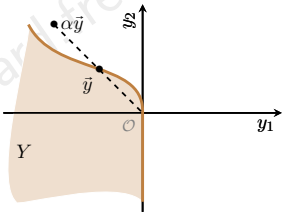


FIGURE 12 – ~~Rdts non décroissants~~

- P8 : Rdts constants à l'échelle : $\forall \vec{y} \in Y, \forall \alpha \geq 0 : \alpha\vec{y} \in Y$.

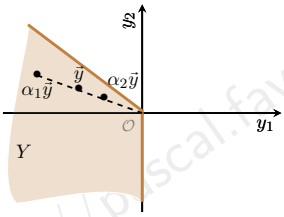


FIGURE 13 – Rdts constants

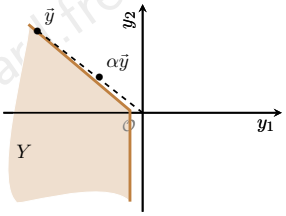


FIGURE 14 – ~~Rdts constants~~

- P9 : Additivité (libre entrée) : $\forall \vec{y},\ \vec{y}' \in Y$ alors, $\vec{y} + \vec{y}' \in Y$.

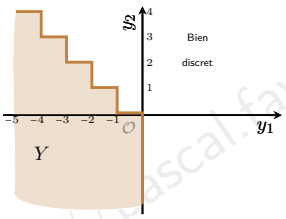


FIGURE 15 – Additivité

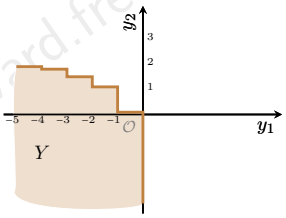


FIGURE 16 – ~~Additivité~~

- P10 : Convexité : $\alpha \in [0,1],\ \forall \vec{y},\ \vec{y}' \in Y$ alors, $\alpha\vec{y} + (1-\alpha)\vec{y}' \in Y$.

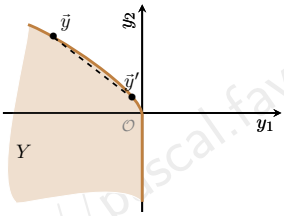


FIGURE 17 – Convexe

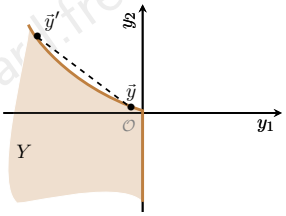


FIGURE 18 – ~~Convexe~~

Proposition :

Un ensemble de production Y est additif et vérifie la condition des rendements non-croissants si et seulement si c'est un cône convexe.

Preuve :

($\Leftarrow$) évidente

($\Rightarrow$) Bon exercice

2. Ensemble de production
2.1 Propriétés de l'ensemble de production
2.2 Cas particulier : Inputs Outputs distincts

http://pascal.favard.free.fr/

Dans les systèmes de production où les inputs sont distincts des outputs, on peut alors noter :

- $\vec{z} \in \mathbb{R}^{L-M}$ le vecteur des quantités, positives ou nulles, d'inputs utilisées et $\vec{q} \in \mathbb{R}^{M}$ le vecteur des quantités, positives, d'outputs produites.
- Dans le cas mono-produit, la fonction de production $f(\cdot)$ donne la quantité maximum d'output q pouvant être produit à partir de chaque vecteur d'input $\vec{z} \in \mathbb{R}^{L-1}$.
- Dans ce cas l'ensemble de production peut se réécrire : $Y = \{(-z_1, \cdots, -z_{L-1}, q) \in \mathbb{R}^L : q - f(\vec{z}) \leq 0 \text{ et } \vec{z} \geq \vec{0}\}$.

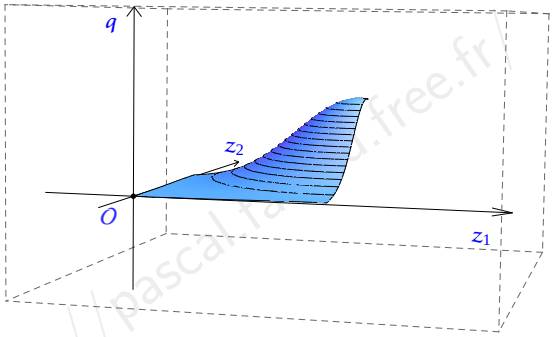


Figure 19 – Fonction de production : Cobb-Douglas

Surface d'isoproduction

Définition :

1. *Soit $\vec{z}' \in \mathbb{R}_+^{L-1}$, l'ensemble $\mathcal{I}q' = \{\vec{z} \in \mathbb{R}_+^{L-1} : f(\vec{z}) = f(\vec{z}')\}$ est l'ensemble des vecteurs de quantités d'inputs qui permettent de produire la même quantité d'output. Dans $\mathbb{R}_+^{L-1}$, $\mathcal{I}q'$ est représenté par une surface d'isoproduction.*
2. *Lorsque $L - 1 = 2$ on appelle ce lieu géométrique, Isoquante.*

Productivité

Définition :

1. $PM_\ell(\vec{z}) = \dfrac{f(\vec{z})}{z_\ell}$ *: la productivité moyenne de l'input ℓ.*
2. $Pm_\ell(\vec{z}) = \dfrac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_\ell}$ *: la productivité marginale de l'input ℓ.*

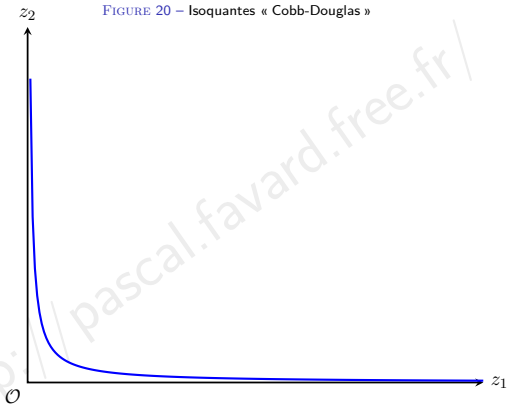


Figure 20 – Isoquantes « Cobb-Douglas »

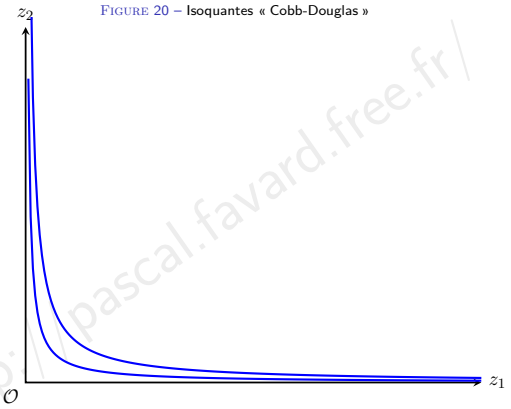


Figure 20 – Isoquantes « Cobb-Douglas »

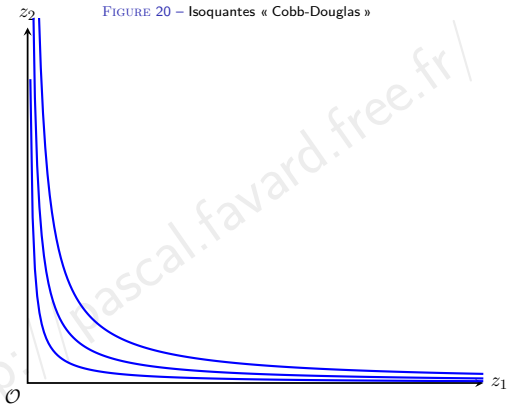


Figure 20 – Isoquantes « Cobb-Douglas »

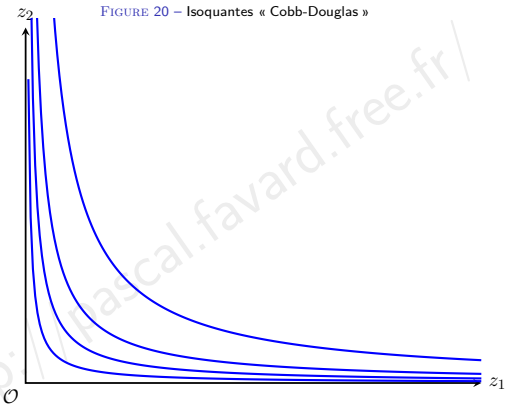
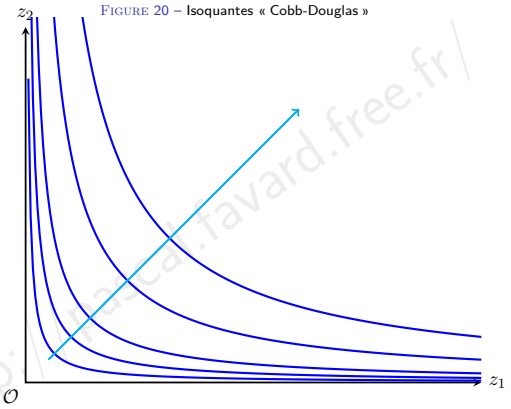


Figure 20 – Isoquantes « Cobb-Douglas »

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 20 – Isoquantes « Cobb-Douglas »



Taux marginal de Substitution Technique : TmST

Supposons $f(\cdot)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\vec{z}$ vérifie $f(\vec{z}) = q$. De combien faut-il diminuer la quantité utilisée d'input k, lorsque le producteur utilise une unité de plus d'input ℓ en plus, pour maintenir la production constante ?

Le long d'une isoquante :

$$\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_k}\mathrm{d}z_k + \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_\ell}\mathrm{d}z_\ell = 0 = \mathrm{d}q,$$

$$\Rightarrow \mathrm{TmST}_{\ell k}(\vec{z}) = \frac{\mathrm{d}z_k}{\mathrm{d}z_\ell} = -\frac{\dfrac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_\ell}}{\dfrac{\partial f(\vec{z})}{\partial z_k}} = -\frac{Pm_\ell(\vec{z})}{Pm_k(\vec{z})}.$$

C'est donc, à un niveau de production donné, la valeur d'une unité d'input ℓ en terme d'unités d'input k à l'intérieur de l'entreprise.

1. Introduction

2. Ensemble de production

3. Le programme du producteur

3. Le programme du producteur
3.1 Maximisation du profit
3.2 Propriétés de la fonction de profit
3.3 Cas particulier : Inputs Outputs distincts

Le producteur « price-taker » cherche le vecteur de quantité de biens, $\vec{y} \in \mathbb{R}^L$ qui maximise son profit sachant que ce vecteur doit appartenir à l'ensemble de production Y non vide, fermé et tel que la propriété de libre disposition est vérifiée. Le programme qu'il doit résoudre est donc :

$$\mathscr{P}_{pr} \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{y}\}}{\mathrm{Max}}\ \pi(\vec{y}) = \vec{p}\cdot\vec{y} \\ slc\ F(\vec{y}) \leq 0 \end{array} \right. \qquad (1)$$

Si $F(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\exists\lambda \geq 0$ tel qu'un meilleur choix $\vec{y}^* \in \vec{y}(\vec{p})$, solution de $\mathscr{P}_{pr}$, (1), doit être solution de :

$$\underset{\{\vec{y}\in Y,\lambda\}}{\mathrm{Max}}\ \mathcal{L}(\vec{y},\lambda) = \vec{p}\cdot\vec{y} - \lambda F(\vec{y}) \qquad (2)$$

$$CN1 : \begin{cases} \vec{p} \ll \lambda^*\nabla F(\vec{y}^*) & (p_\ell = \lambda^*\dfrac{\partial F(\vec{y}^*)}{\partial y_\ell}),\ \text{si } y_\ell^* \neq 0) \\ [\vec{p} - \lambda^*\nabla F(\vec{y}^*)]\cdot\vec{y}^* = 0 \\ F(\vec{y}) \leq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

CS2 :

1. $\vec{y}^*$ est un maximum local si les $L-1$ derniers mineurs principaux diagonaux de la matrice hessienne bordée du Lagrangien $\mathcal{L}$ évaluée en $(\vec{y}^*, \lambda^*)$ sont alternativement > 0 et < 0, le dernier D_{L+1} étant du même signe que $(-1)^L$.
2. $\vec{y}^*$ est un maximun global si $\mathcal{L}$ est une fonction concave.

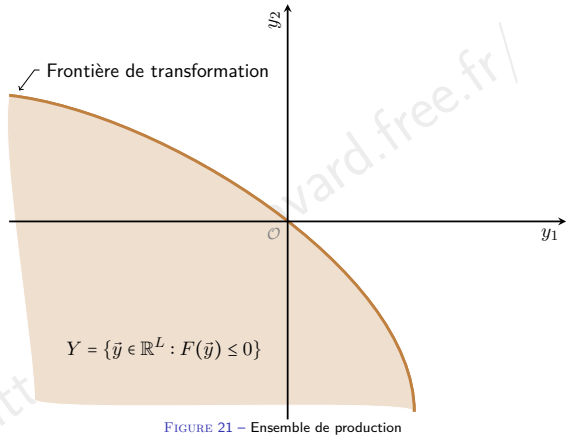


FIGURE 21 – Ensemble de production

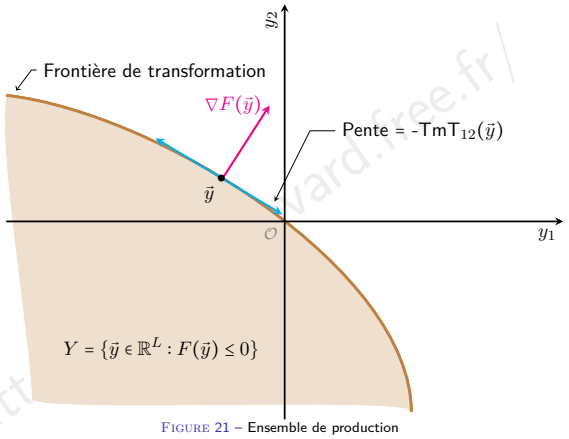


FIGURE 21 – Ensemble de production

http://pascal.favard.free.fr/

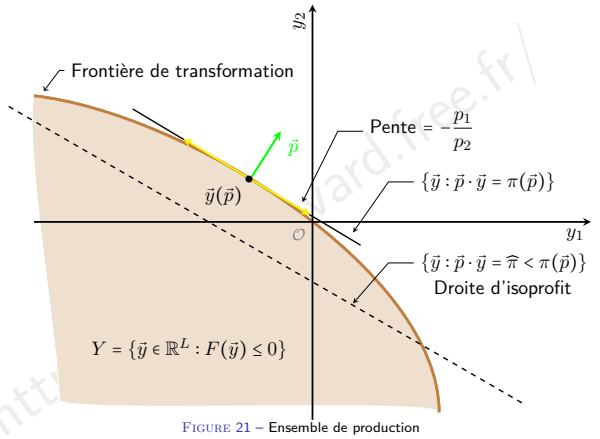


FIGURE 21 – Ensemble de production

Le programme du producteur | Maximisation du profit

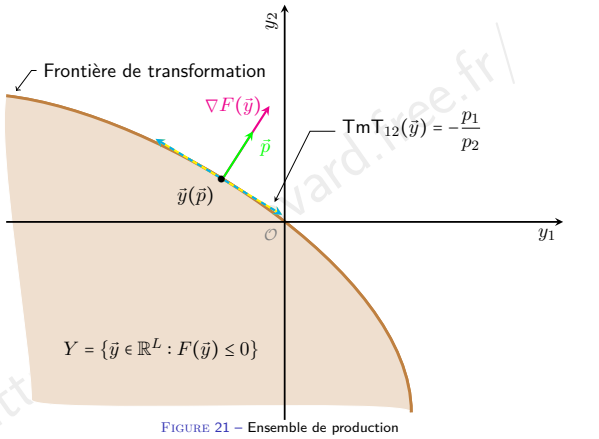


FIGURE 21 – Ensemble de production

3. Le programme du producteur
3.1 Maximisation du profit
3.2 Propriétés de la fonction de profit
3.3 Cas particulier : Inputs Outputs distincts

Proposition :

Si $\pi(\cdot)$ est la fonction de profit de l'ensemble de production Y et $\vec{y}(\cdot)$ la correspondance d'offre associée, alors :

1. *$\pi(\cdot)$ est homogène de degré un,*
2. *$\pi(\cdot)$ est convexe,*
3. *Si Y est convexe, alors $Y = \left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^L : \vec{p} \cdot \vec{y} \leq \pi(\vec{p}) \ \forall \vec{p} \gg 0\right\}$,*
4. *$\vec{y}(\cdot)$ est homogène de degré zéro,*
5. *Si Y est convexe (strictement), $\vec{y}(\vec{p})$ est convexe $\forall \vec{p}$ (unique si non-vide).*

Preuve : Bon exercice.

3. Le programme du producteur
3.1 Maximisation du profit
3.2 Propriétés de la fonction de profit
3.3 Cas particulier : Inputs Outputs distincts

Le producteur « price-taker » cherche le vecteur de quantités d'inputs, $\vec{z} \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ et q la quantité d'output qui maximise son profit sachant que q doit appartenir à l'ensemble de production non vide, fermé et tel que la propriété de libre disposition est vérifiée. Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_{p_r} \left| \begin{array}{l} \underset{\{q,\vec{z}\}}{\mathrm{Max}} \ \pi(q,\vec{z}) = pq - \vec{w} \cdot \vec{z} \\ slc \ f(\vec{z}) \geq q \end{array} \right. \tag{4}$$

Si $f(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\exists \lambda \geq 0$ tel qu'un meilleur choix $(q^*, \vec{z}^*)$, solution de $\mathscr{P}_{p_r}$, (4), doit être solution de :

$$\underset{\{q>0,\vec{z},\lambda\}}{\mathrm{Max}} \ \mathcal{L}(q,\vec{z},\lambda) = pq - \vec{w} \cdot \vec{z} - \lambda(q - f(\vec{z})) \tag{5}$$

$$CN1 : \begin{cases} p = \lambda^* \\ \vec{w} \geqq \lambda^* \nabla f(\vec{z}^*) \\ [-\vec{w} + \lambda \nabla f(\vec{z}^*)] \cdot \vec{z}^* = 0 \\ f(\vec{z}) \geq q \end{cases} \quad \left(w_\ell = \lambda^* \frac{\partial f(\vec{z}^*)}{\partial z_\ell}\right), \text{ si } z_\ell^* \neq 0) \tag{6}$$

CS2 : à vérifier

Si la solution de (4) est intérieure, alors elle vérifie : $p\nabla f(\vec{z}^*) = \vec{w}$. Soit pour chaque input :

$$Pm_\ell(\vec{z}^*) = \frac{\partial f(\vec{z}^*)}{\partial z_\ell} = \frac{w_\ell}{p},$$

la production, en valeur, engendrée par la dernière unité d'input ℓ utilisée doit être égale au prix unitaire de l'input considéré.

$$TmST_{\ell k} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\ell} = -\frac{w_\ell}{w_k} = -\frac{Pm_\ell(\vec{z}^*)}{Pm_k(\vec{z}^*)}$$

http://pascal.favard.free.fr/

1. Introduction

2. Ensemble de production
2.1 Propriétés de l'ensemble de production
2.2 Cas particulier : Inputs Outputs distincts

3. Le programme du producteur
3.1 Maximisation du profit
3.2 Propriétés de la fonction de profit
3.3 Cas particulier : Inputs Outputs distincts

Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

Université François - Rabelais Tours

Les chapitres : L2 & L3

1ere Partie : Choix individuels

1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique

2nde Partie : Équilibre, défaillances du marché & pouvoir de marché

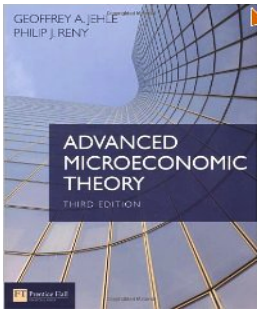
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole & monopole naturel
9. Externalité
10. Bien collectif

Chapitre 4 :

« Offre & dualité »

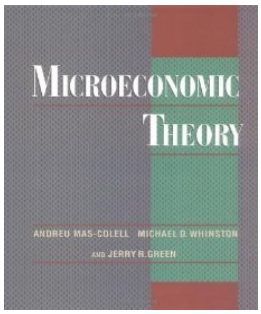
Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université

Plan

1. Introduction
2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts
3. La fonction d'offre : Inputs Outputs distincts

1. Introduction
2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts
3. La fonction d'offre : Inputs Outputs distincts

http://pascal.favard.free.fr/

Le producteur est un agent économique :

- dans économie où il y a L biens divisibles, si rien n'est précisé,
- qui est supposé, dans ce chapitre :
  - être efficace ,
  - être en information complète,
  - être preneur en prix,
  - « vivre » une seule période,
  - « vivre » en univers certain.

Notations vectorielles

- $\vec{y}$ est son vecteur de production (vecteur input-output). Le vecteur de production est un vecteur colonne :

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\ell \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix} = [y_1, y_2, .., y_\ell, .., y_L]^t.$$

- $\vec{p}$ est le vecteur prix des biens. Le vecteur prix est un vecteur ligne : $\vec{p} = [p_1, p_2, ..., p_\ell, ..., p_L] \gg 0$.

Le programme du producteur

Le producteur « price-taker » cherche le vecteur de quantités d'inputs, $\vec{z} \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ et q la quantité d'output qui maximise son profit sachant que q doit appartenir à l'ensemble de production non vide, fermé et tel que la propriété de libre disposition est vérifiée. Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_{p_r} \left| \begin{array}{l} \underset{\{q,\vec{z}\}}{\text{Max}} \ \pi(q,\vec{z}) = pq - \vec{w}\cdot\vec{z} \\ slc \ f(\vec{z}) \geq q \end{array} \right. \tag{1}$$

$q(p;\vec{w})$ solutions de ce programme, pour tout p, est appelé correspondance d'offre. Si pour tout vecteur de prix la solution de $\mathscr{P}_{p_r}$ est unique cet ensemble est appelé fonction d'offre.

Si la solution de (1) est intérieure, alors elle vérifie : $p\nabla f(\vec{z^*}) = \vec{w}$. Soit pour chaque input : $Pm_\ell(\vec{z}^*) = \dfrac{\partial f(\vec{z}^*)}{\partial z_\ell} = \dfrac{w_\ell}{p}$. La production, en valeur, engendrée par la dernière unité d'input ℓ utilisée doit être égale au prix unitaire de l'input considéré.

$$TmST_{\ell k} = \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\ell} = -\frac{w_\ell}{w_k} = -\frac{Pm_\ell(\vec{z}^*)}{Pm_k(\vec{z}^*)}.$$

1. Introduction

2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts

3. La fonction d'offre : Inputs Outputs distincts

2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts
2.1 Le dual : minimisation de la dépense
2.2 Définitions
2.3 Propriétés de la fonction de coût
2.4 Maximisation du profit et fonction de coût
2.5 Propriétés géométriques du coût et de l'offre

Pour atteindre le profit maximum, il faut que la dépense pour produire q soit minimale (condition nécessaire). Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_{\text{coût}} \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{z}\}}{\text{Min}} \ \vec{w}\cdot\vec{z} \\ slc \ f(\vec{z}) \geq q \end{array} \right. \tag{2}$$

L'ensemble des $\vec{z}(q;\vec{w})$ solutions de ce programme, pour tout $\vec{w} \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ et $q \geq 0$, est appelé correspondance de demande conditionnelle d'inputs. Si pour tout $\vec{z}(q;\vec{w})$, la solution est unique, cet ensemble est appelé fonction de demande conditionnelle d'input. La dépense évaluée en $\vec{z}(q;\vec{w})$ est appelée la fonction de coût, $C(q;\vec{w})$.

Si $f(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\exists\lambda \geq 0$ tel que $\vec{z}(q;\vec{w})$, solution de (2), doit être solution de :

$$\underset{\{\vec{z},\lambda\}}{\text{Min}} \ \mathcal{L}(\vec{z},\lambda) = \vec{w}\cdot\vec{z} - \lambda[f(\vec{z}) - q]. \tag{3}$$

$$CN1 : \begin{cases} \vec{w} \geqq \lambda^*\nabla f(\vec{y}^*) & (w_\ell = \lambda^*\dfrac{\partial f(\vec{z}^*)}{\partial z_\ell}), \text{ si } z_\ell^* \neq 0) \\ [\vec{w} - \lambda^*\nabla f(\vec{z}^*)]\cdot\vec{z}^* = 0 \\ f(\vec{z}) \geq q \end{cases} \tag{4}$$

CS2 : Voir chapitre précédent

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 1 – La minimisation de la dépense

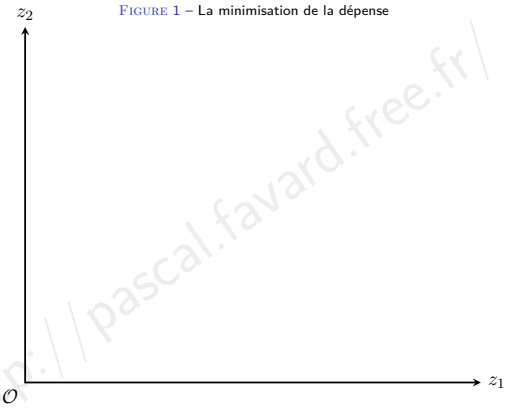


FIGURE 1 – La minimisation de la dépense

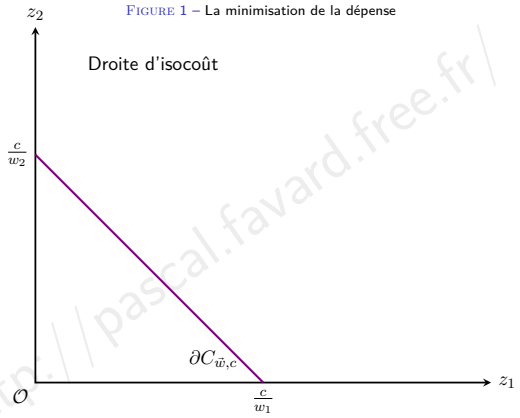


FIGURE 1 – La minimisation de la dépense

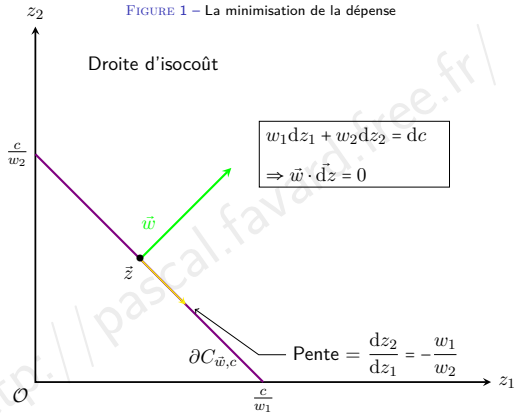


FIGURE 1 – La minimisation de la dépense

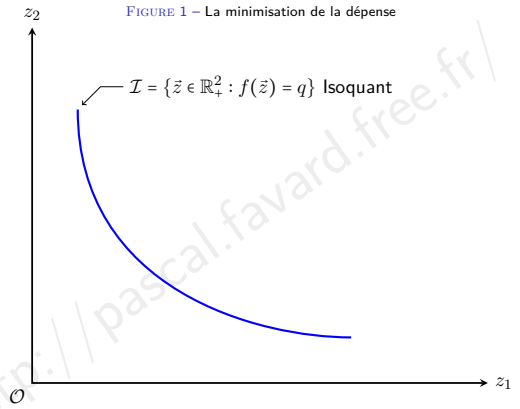


FIGURE 1 – La minimisation de la dépense

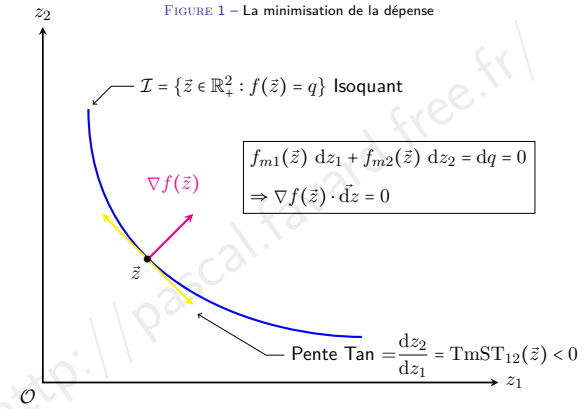


FIGURE 1 – La minimisation de la dépense

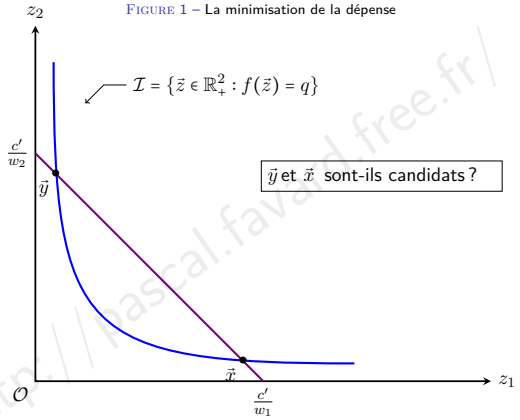


FIGURE 1 – La minimisation de la dépense

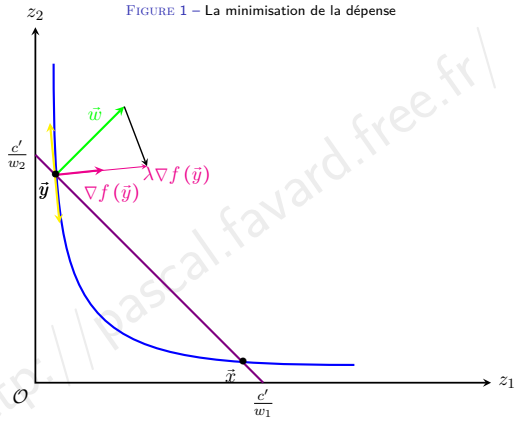
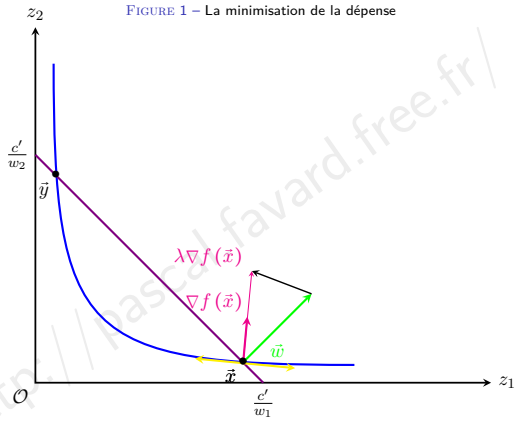
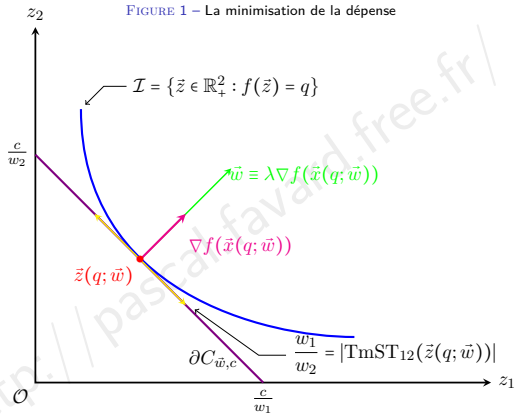


FIGURE 1 – La minimisation de la dépense



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 1 – La minimisation de la dépense



2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts
2.1 Le dual : minimisation de la dépense
2.2 Définitions
2.3 Propriétés de la fonction de coût
2.4 Maximisation du profit et fonction de coût
2.5 Propriétés géométriques du coût et de l'offre

Définition :

Soit q la quantité d'output et $\vec{w}$ le vecteur des prix des inputs et $C(q;\vec{w})$ la fonction de coût (total), on a :

1. $CM(q;\vec{w}) = \dfrac{C(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût moyen,*
2. $Cm(q;\vec{w}) = \dfrac{\partial C(q;\vec{w})}{\partial q}$, *la fonction de coût marginal,*
3. CF, *le coût fixe,*
4. $CFM(q) = \dfrac{CF}{q}$, *le coût fixe moyen,*
5. $CV(q;\vec{w})$, *la fonction de coût variable,*
6. $CVM(q;\vec{w}) = \dfrac{CV(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût variable moyen.*

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Définitions

Définition :

Soit q la quantité d'output et $\vec{w}$ le vecteur des prix des inputs et $C(q;\vec{w})$ la fonction de coût (total), on a :

1. $CM(q;\vec{w}) = \dfrac{C(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût moyen,*
2. $Cm(q;\vec{w}) = \dfrac{\partial C(q;\vec{w})}{\partial q}$, *la fonction de coût marginal,*
3. CF, *le coût fixe,*
4. $CFM(q) = \dfrac{CF}{q}$, *le coût fixe moyen,*
5. $CV(q;\vec{w})$, *la fonction de coût variable,*
6. $CVM(q;\vec{w}) = \dfrac{CV(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût variable moyen.*

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 4 : OFFRE & DUALITÉ 11-09-2017 15/38

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Définitions

Définition :

Soit q la quantité d'output et $\vec{w}$ le vecteur des prix des inputs et $C(q;\vec{w})$ la fonction de coût (total), on a :

1. $CM(q;\vec{w}) = \dfrac{C(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût moyen,*
2. $Cm(q;\vec{w}) = \dfrac{\partial C(q;\vec{w})}{\partial q}$, *la fonction de coût marginal,*
3. CF, *le coût fixe,*
4. $CFM(q) = \dfrac{CF}{q}$, *le coût fixe moyen,*
5. $CV(q;\vec{w})$, *la fonction de coût variable,*
6. $CVM(q;\vec{w}) = \dfrac{CV(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût variable moyen.*

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 4 : OFFRE & DUALITÉ 11-09-2017 15/38

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Définitions

Définition :

Soit q la quantité d'output et $\vec{w}$ le vecteur des prix des inputs et $C(q;\vec{w})$ la fonction de coût (total), on a :

1. $CM(q;\vec{w}) = \dfrac{C(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût moyen,*
2. $Cm(q;\vec{w}) = \dfrac{\partial C(q;\vec{w})}{\partial q}$, *la fonction de coût marginal,*
3. CF, *le coût fixe,*
4. $CFM(q) = \dfrac{CF}{q}$, *le coût fixe moyen,*
5. $CV(q;\vec{w})$, *la fonction de coût variable,*
6. $CVM(q;\vec{w}) = \dfrac{CV(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût variable moyen.*

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 4 : OFFRE & DUALITÉ 11-09-2017 15/38

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Définitions

Définition :

Soit q la quantité d'output et $\vec{w}$ le vecteur des prix des inputs et $C(q;\vec{w})$ la fonction de coût (total), on a :

1. $CM(q;\vec{w}) = \dfrac{C(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût moyen,*
2. $Cm(q;\vec{w}) = \dfrac{\partial C(q;\vec{w})}{\partial q}$, *la fonction de coût marginal,*
3. CF, *le coût fixe,*
4. $CFM(q) = \dfrac{CF}{q}$, *le coût fixe moyen,*
5. $CV(q;\vec{w})$, *la fonction de coût variable,*
6. $CVM(q;\vec{w}) = \dfrac{CV(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût variable moyen.*

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 4 : OFFRE & DUALITÉ 11-09-2017 15/38

http://pascal.favard.free.fr/

Définition :

Soit q la quantité d'output et $\vec{w}$ le vecteur des prix des inputs et $C(q;\vec{w})$ la fonction de coût (total), on a :

1. $CM(q;\vec{w}) = \dfrac{C(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût moyen,*
2. $Cm(q;\vec{w}) = \dfrac{\partial C(q;\vec{w})}{\partial q}$, *la fonction de coût marginal,*
3. CF, *le coût fixe,*
4. $CFM(q) = \dfrac{CF}{q}$, *le coût fixe moyen,*
5. $CV(q;\vec{w})$, *la fonction de coût variable,*
6. $CVM(q;\vec{w}) = \dfrac{CV(q;\vec{w})}{q}$, *la fonction de coût variable moyen.*

$C(q;\vec{w}) = CV(q;\vec{w}) + CF$ et $CM(q;\vec{w}) = CVM(q;\vec{w}) + CFM(q)$

Proposition :

Soit $\underline{Cm}$ (resp. $\underline{CVM}$, $\underline{CM}$) le minimum du coût marginal (resp. variable moyen, moyen) ; si ces valeurs existent, on a :

1. $\underline{Cm} \leq \underline{CVM} \leq \underline{CM}$,
2. $\exists q' > 0$ *tel que* $Cm(q';\vec{w}) = \underline{CVM}$,
3. $\exists q'' > q'$ *tel que* $Cm(q'';\vec{w}) = \underline{CM}$.

Preuve : Avec dérivées.

2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts
2.1 Le dual : minimisation de la dépense
2.2 Définitions
2.3 Propriétés de la fonction de coût
2.4 Maximisation du profit et fonction de coût
2.5 Propriétés géométriques du coût et de l'offre

Proposition :

Si $C(q;\vec{w})$ est la fonction de coût d'une technologie mono-produit Y (fermé et libre disposition) avec la fonction de production $f(\cdot)$ et $\vec{z}(q;\vec{w})$ les correspondances de demandes conditionnelles d'inputs associées, alors :

1. $C(\cdot)$ *est homogène de degré un par rapport à* $\vec{w}$ *et non-décroissante en* q,
2. $C(\cdot)$ *est concave en* $\vec{w}$,
3. $\vec{z}(\cdot)$ *est homogène de degré zéro par rapport à* $\vec{w}$,
4. *Si l'ensemble* $\{\vec{z} \underline{\gg} 0; f(\vec{z}) \geq q\}$ *est (strictement) convexe, alors* $\vec{z}(q;\vec{w})$ *est (une fonction) un ensemble convexe.*

Preuve : Bon exercice.

2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts
2.1 Le dual : minimisation de la dépense
2.2 Définitions
2.3 Propriétés de la fonction de coût
2.4 Maximisation du profit et fonction de coût
2.5 Propriétés géométriques du coût et de l'offre

Le producteur « price-taker » cherche q la quantité d'output qui maximise son profit comme étant la différence entre sa recette (totale) et son coût (total). Le programme qu'il doit résoudre est donc le suivant :

$$\mathscr{P}_{pr} \left| \; \underset{\{q\}}{\text{Max}} \;\; \pi(q;\vec{w},p) = pq - C(q;\vec{w}) \right. \qquad (5)$$

$q(p;\vec{w})$ solutions de ce programme, pour tout p, est appelé correspondance d'offre. Si pour tout vecteur de prix la solution de $\mathscr{P}_{pr}$ est unique cet ensemble est appelé fonction d'offre.

2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts
2.1 Le dual : minimisation de la dépense
2.2 Définitions
2.3 Propriétés de la fonction de coût
2.4 Maximisation du profit et fonction de coût
2.5 Propriétés géométriques du coût et de l'offre

Si la solution de (5) est intérieure, alors : $\boxed{p = \dfrac{\partial C(q^*;\vec{w})}{\partial q} = Cm(q^*;\vec{w}).}$

On a donc bien : $Rm(q^*;\vec{w},p) = Cm(q^*;\vec{w}) \Rightarrow \pi_m(q^*;\vec{w},p) = 0.$

Attention : c'est la solution du programme ssi $\pi(q^*;\vec{w},p) > \pi(0;\vec{w},p)$.

Seuil de fermeture : $\pi(q(p_{sf},\vec{w})) = -CF$.

Seuil de rentabilité : $\pi(q(p_{sr},\vec{w})) = 0$.

http://pascal.favard.free.fr/

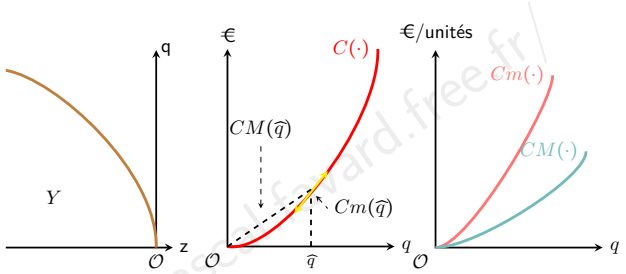


FIGURE 2 – Technologie strictement convexe, rendements décroissants.

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Propriétés géométriques du coût et de l'offre

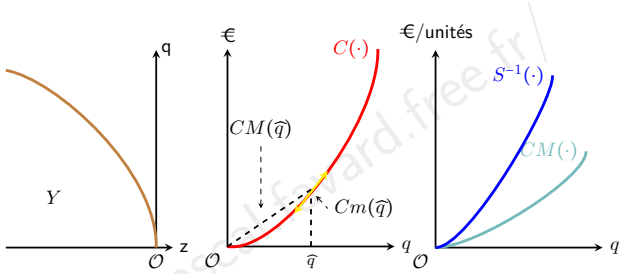


FIGURE 2 – Technologie strictement convexe, rendements décroissants.

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Propriétés géométriques du coût et de l'offre

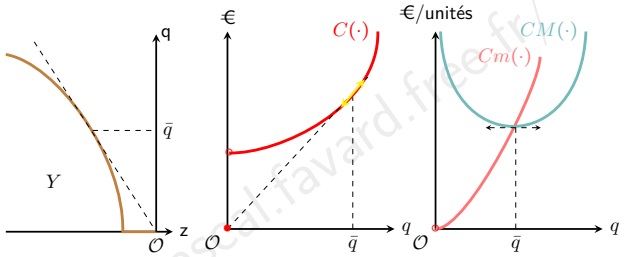


FIGURE 3 – Coûts fixes récupérables.

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Propriétés géométriques du coût et de l'offre

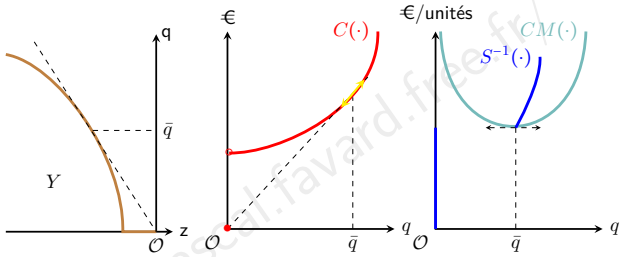


FIGURE 3 – Coûts fixes récupérables.

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Propriétés géométriques du coût et de l'offre

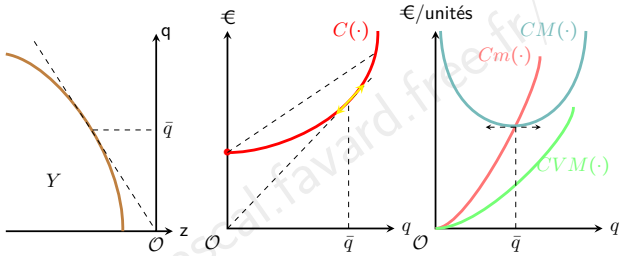


FIGURE 4 – Coûts fixes irrécupérables.

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Propriétés géométriques du coût et de l'offre

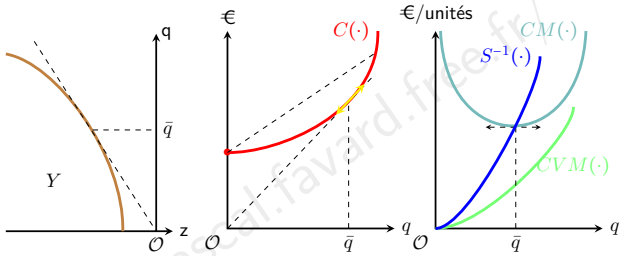


FIGURE 4 – Coûts fixes irrécupérables.

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Propriétés géométriques du coût et de l'offre

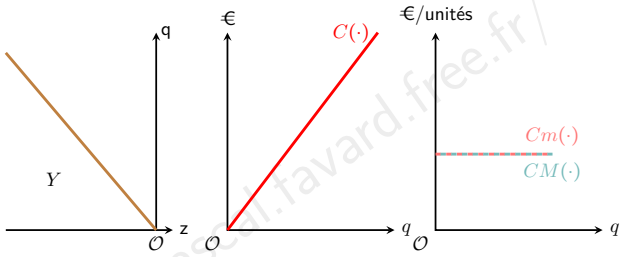


FIGURE 5 – Rendements constants.

La fonction de coût : Inputs Outputs distincts | Propriétés géométriques du coût et de l'offre

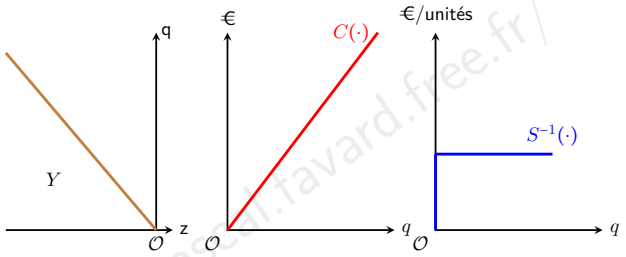


FIGURE 5 – Rendements constants.

http://pascal.favard.free.fr/

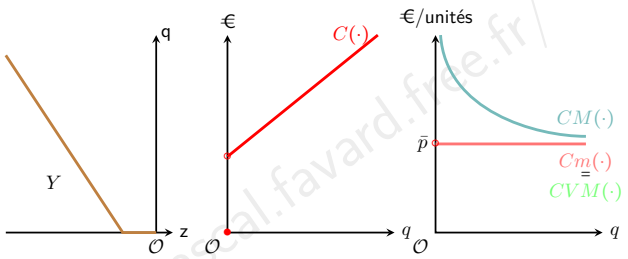


FIGURE 6 – Rendements constants et coûts fixes.

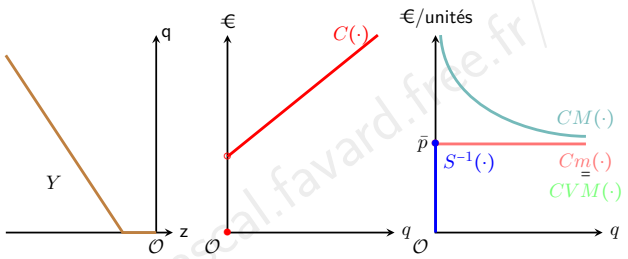


FIGURE 6 – Rendements constants et coûts fixes.

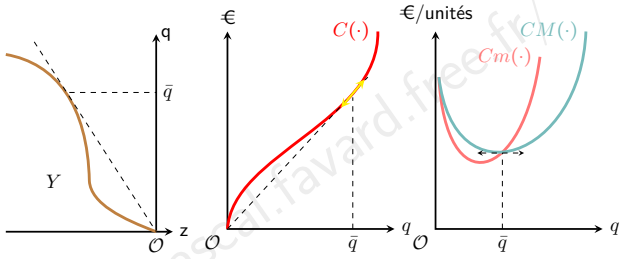


FIGURE 7 – Technologie non convexe

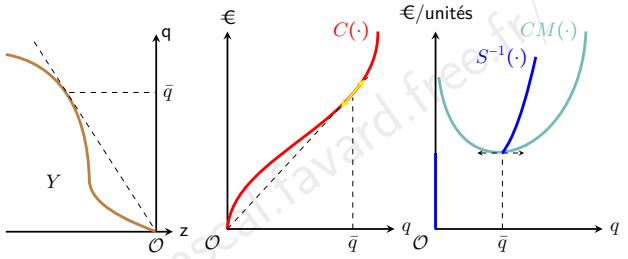


FIGURE 7 – Technologie non convexe

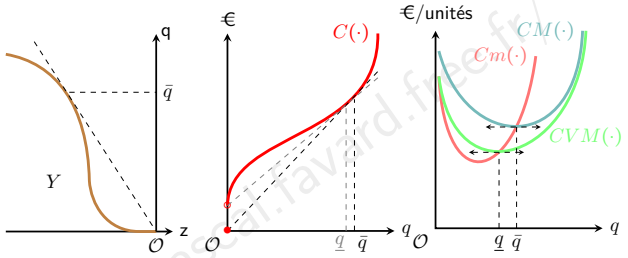


FIGURE 8 – Technologie non convexe et coûts fixes récupérables

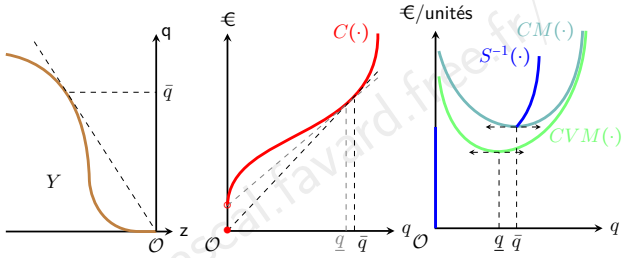


FIGURE 8 – Technologie non convexe et coûts fixes récupérables

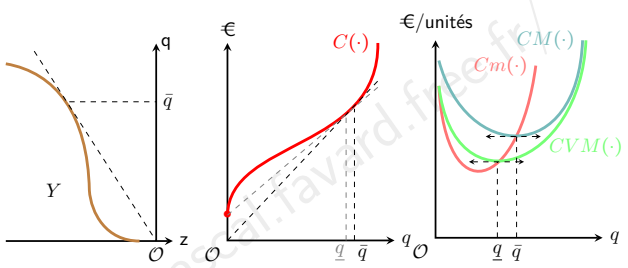


FIGURE 9 – Technologie non convexe et coûts fixes irrécupérables

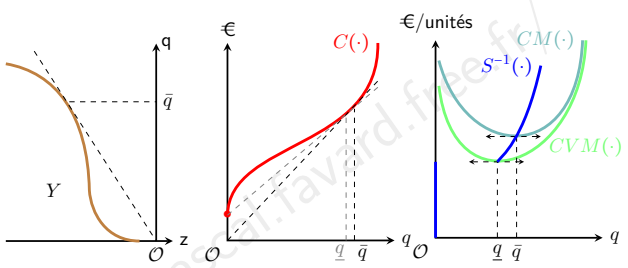


FIGURE 9 – Technologie non convexe et coûts fixes irrécupérables

http://pascal.favard.free.fr/

1. Introduction

2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts

3. La fonction d'offre : Inputs Outputs distincts

3. La fonction d'offre : Inputs Outputs distincts
3.1 La courbe d'offre
3.2 Le surplus du producteur
3.3 L'élasticité-prix de l'offre

FIGURE 10 – La courbe d'offre

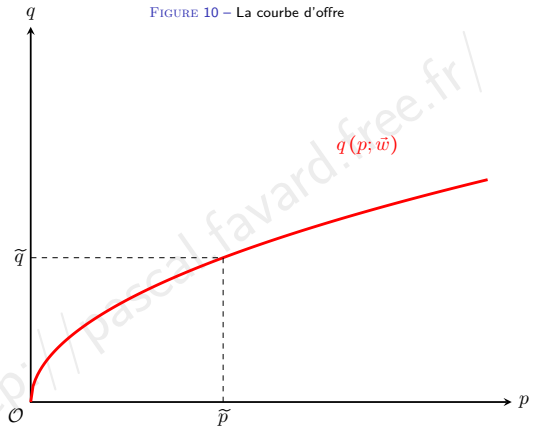


FIGURE 10 – La courbe d'offre

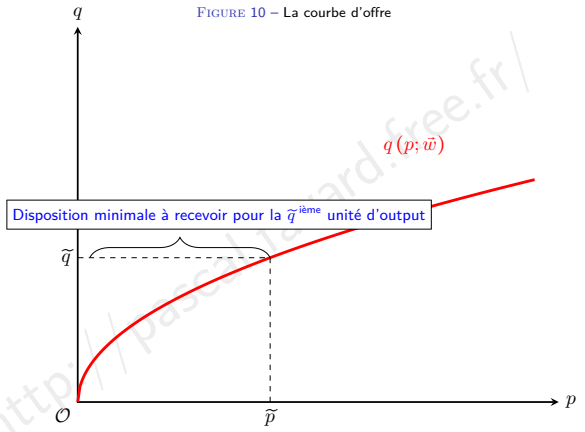
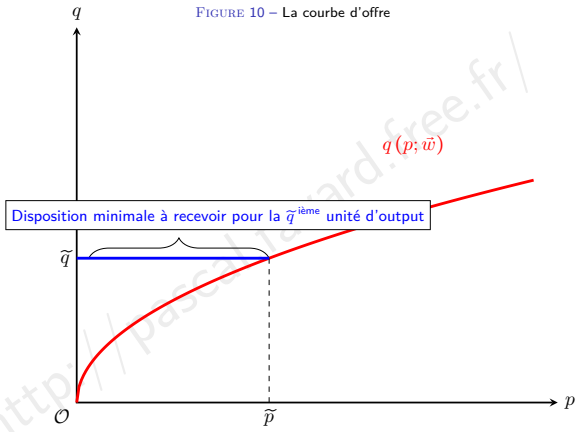


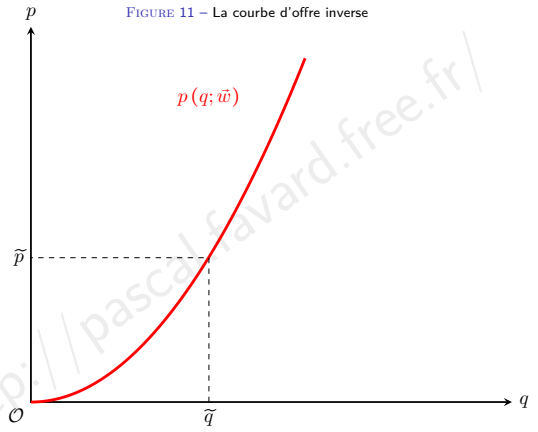
FIGURE 10 – La courbe d'offre



3. La fonction d'offre : Inputs Outputs distincts
3.1 La courbe d'offre
3.2 Le surplus du producteur
3.3 L'élasticité-prix de l'offre

- La mesure du surplus brut du producteur est simple, c'est sa recette : $SB = pq$.
- La mesure du surplus net du producteur est simple, c'est son profit : $SN = pq - C(q)$.
- Si l'on a que la fonction d'offre, comment calculer les surplus ?

FIGURE 11 – La courbe d'offre inverse



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 11 – La courbe d'offre inverse

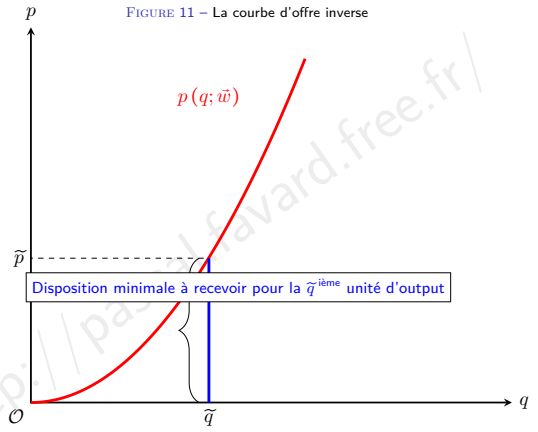


FIGURE 11 – La courbe d'offre inverse

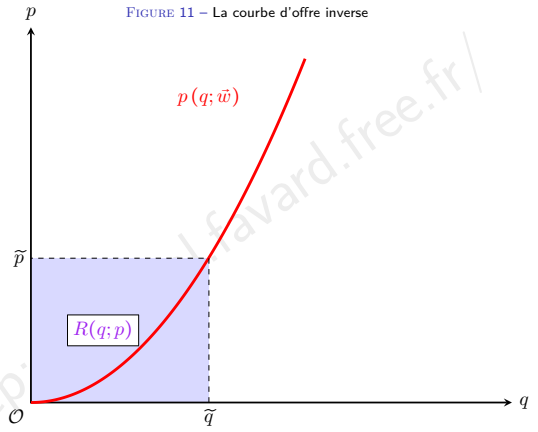


FIGURE 11 – La courbe d'offre inverse

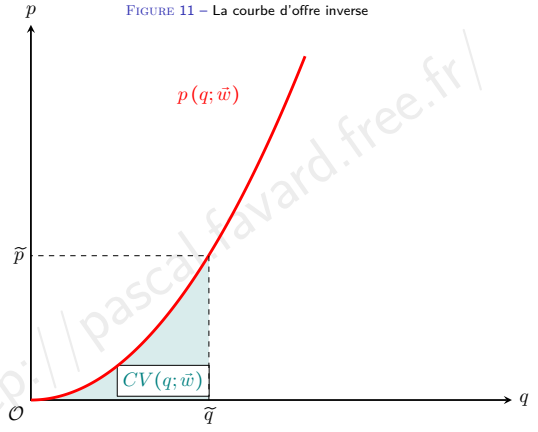
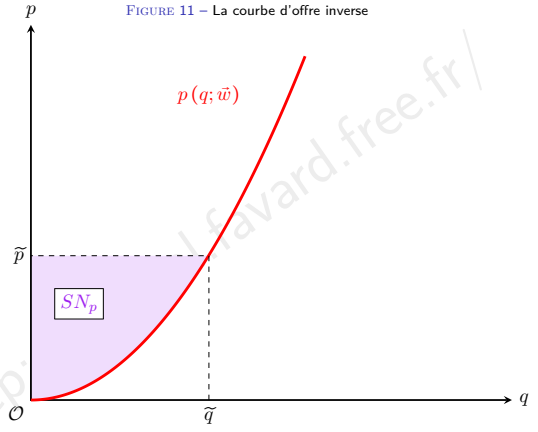


FIGURE 11 – La courbe d'offre inverse



3. La fonction d'offre : Inputs Outputs distincts
3.1 La courbe d'offre
3.2 Le surplus du producteur
3.3 L'élasticité-prix de l'offre

Élasticité-prix

$$\mu_p(p;\vec{w}) = \frac{\mathrm{d}\ln q(p;\vec{w})}{\mathrm{d}\ln p} = \frac{\partial q(p;\vec{w})}{\partial p}\frac{p}{q(p;\vec{w})}$$

- C'est le pourcentage de variation de la quantité offerte par le producteur si le prix de vente augmente de 1%.
- N'est définie que pour un prix supérieur au seuil de fermeture.

Table des matières (Diapo : 1)

1. Introduction

2. La fonction de coût : Inputs Outputs distincts
2.1 Le dual : minimisation de la dépense
2.2 Définitions
2.3 Propriétés de la fonction de coût
2.4 Maximisation du profit et fonction de coût
2.5 Propriétés géométriques du coût et de l'offre

3. La fonction d'offre : Inputs Outputs distincts
3.1 La courbe d'offre
3.2 Le surplus du producteur
3.3 L'élasticité-prix de l'offre

http://pascal.favard.free.fr/

Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

Université François - Rabelais Tours

Les chapitres : L2 & L3

1ere Partie : Choix individuels

1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique

2nde Partie : Équilibre, défaillances du marché & pouvoir de marché

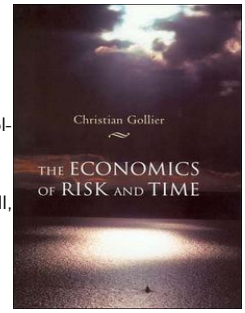
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole & monopole naturel
9. Externalité
10. Bien collectif

Chapitre 5 :

« Risque & dynamique »

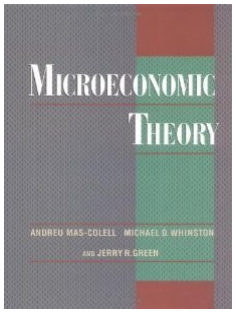
Vive la lecture !

1. « The Economics of Risk and Time » C. Gollier, MIT Press
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds



Vive la lecture !

1. « The Economics of Risk and Time » C. Gollier, MIT Press
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds



Plan

1. Risque
2. Dynamique

1. Risque
2. Dynamique

http://pascal.favard.free.fr/

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

http://pascal.favard.free.fr/

Le consommateur est un agent économique :

- qui consomme L biens pour augmenter sa satisfaction
- qui a des ressources $\mathcal{R}$
- qui est supposé :
  - être rationnel
  - être en information complète
  - être preneur en prix
  - vivre en univers ~~non~~ risqué
  - vivre une seule période

Knight (1921) Risque Vs incertitude

- Une situation est incertaine s'il est impossible d'associer une probabilité objective de survenue à chacun des états de la nature.
- Une situation est risquée s'il est possible d'associer une probabilité objective de survenue à chacun des états de la nature.

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

Trois concepts différents :

- Prévention
- Prudence
- Précaution

La prévention

- Auto-protection : effort (dépense) pour réduire la probabilité d'occurrence d'un événement négatif. *Jointer les ouvertures.*
- Auto-assurance : effort (dépense) pour réduire le niveau de la perte en cas d'occurrence d'un événement négatif. *Mettre ses meubles au 1er étage.*
- Concept statique

La prudence

- Épargner pour se prémunir d'aléas monétaires futurs.
- Dans ce cas pas de dépense ni pour diminuer la probabilité de survenu ni pour diminuer les conséquences, seul le taux d'épargne change. Concept dynamique : transfert intertemporel de la consommation.

La précaution

Charte de l'environnement Art. 5. - Lorsque la réalisation d'un dommage, bien qu'incertaine en l'état des connaissances scientifiques, pourrait affecter de manière grave et irréversible l'environnement, les autorités publiques veillent, par application du principe de précaution et dans leurs domaines d'attributions, à la mise en œuvre de procédures d'évaluation des risques et à l'adoption de mesures provisoires et proportionnées afin de parer à la réalisation du dommage.

- Connaissance imparfaite du risque ⇒ incertitude (~~risque~~)
- Connaissance imparfaite de la probabilité d'occurrence d'un événement négatif et/ou du niveau de la perte associée
- Concept dynamique : gérer au mieux le flux d'informations sur l'aléa considéré

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

http://pascal.favard.free.fr/

Notations vectorielles

- $\vec{x} \in X$ est son vecteur de consommation, appelé panier du consommateur. Le vecteur de consommation est un vecteur colonne :

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_L]^t.$$

- $\vec{p}$ est le vecteur prix des biens. Le vecteur prix est un vecteur ligne : $\vec{p} = [p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_L]$.

Loterie

- Soit $N < \infty$ états de la nature.
- Soit $\mathrm{x} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \ldots, \vec{x}_N]$ un ensemble de paniers de consommation avec $\mathrm{x} \subset X$. Chaque panier est associé à un état de la nature.
- Soit $\vec{\mathbf{p}}_k = [\mathbf{p}_{1k}, \mathbf{p}_{2k}, \ldots, \mathbf{p}_{nk}, \ldots, \mathbf{p}_{Nk}] \in \mathrm{P}$ un vecteur de probabilités avec $\mathrm{P} \equiv \left\{ \vec{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{R}_+^N \middle| \sum_{n=1}^{N} \mathbf{p}_{nk} = 1 \right\}$. La probabilité objective que l'état de la nature n survienne est donc $\mathbf{p}_{nk}$.
- Soit $\ell_k \in \mathcal{L}$ une loterie avec $\ell_k = (\vec{\mathbf{p}}_k; \mathrm{x})$.
- x est invariant on peut noter $\ell_k = \vec{\mathbf{p}}_k$ et donc $\mathcal{L} \equiv \mathbf{P}$.

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

Objectif

- Classer des loteries indépendamment des caractéristiques individuelles et donc pouvoir dire que $\ell_{k_1} \gtrsim \ell_{k_2}$ sans connaître $v(.)$.
- On compare donc ces deux loteries soit :
  1. par rapport aux niveaux des gains,
  2. par rapport à la dispersion des gains.

Dominance stochastique de premier ordre

Proposition :

F_{k_1} domine stochastiquement au premier ordre F_{k_2} ssi une de ces trois propriétés est satisfaite :

- $\forall v(.)$ *non-décroissante*, $\mathbb{E}[v(\mathrm{R}_{k_1})] \geq \mathbb{E}[v(\mathrm{R}_{k_2})]$,
- $\mathrm{R}_{k_1} = \mathrm{R}_{k_2} + \varepsilon$, *avec* ε *v.a. réelle non-négative*,
- $\forall \mathcal{R} \in [0, \overline{\mathcal{R}}], F_{k_1}(\mathcal{R}) \leq F_{k_2}(\mathcal{R})$.

Figure 1 – F_{k_1} domine stochastiquement au premier ordre F_{k_2}

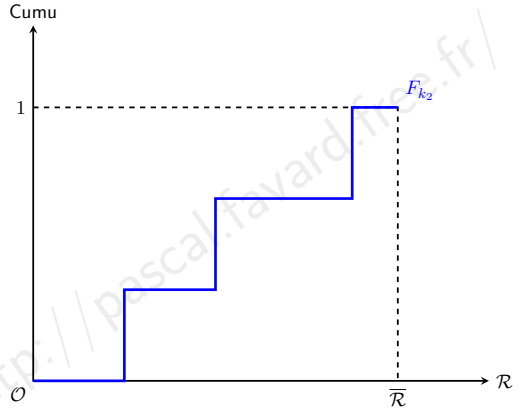
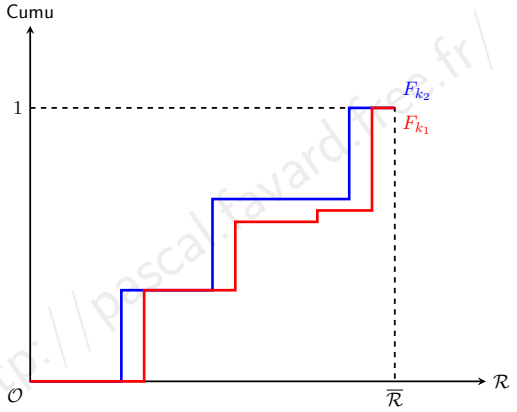


Figure 1 – F_{k_1} domine stochastiquement au premier ordre F_{k_2}



Dominance stochastique de deuxième ordre

Proposition :

F_{k_1} domine stochastiquement au deuxième ordre F_{k_2} ssi une de ces trois propriétés est satisfaite :

- $\forall v(.)$ *concave*, $\mathbb{E}[v(\mathrm{R}_{k_1})] \geq \mathbb{E}[v(\mathrm{R}_{k_2})]$,
- $\mathrm{R}_{k_2} = \mathrm{R}_{k_1} + \varepsilon$, *avec* $\mathbb{E}[\varepsilon | \mathrm{R}_{k_1}] = 0$,
- $\forall \mathcal{R} \in [0, \overline{\mathcal{R}}], \int_0^{\mathcal{R}} F_{k_1}(t)\mathrm{d}t \leq \int_0^{\mathcal{R}} F_{k_2}(t)\mathrm{d}t$.

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 2 – F_{k_1} domine stochastiquement au deuxième ordre F_{k_2}

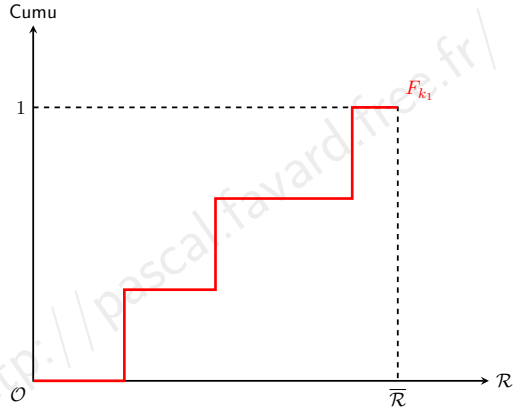


FIGURE 2 – F_{k_1} domine stochastiquement au deuxième ordre F_{k_2}

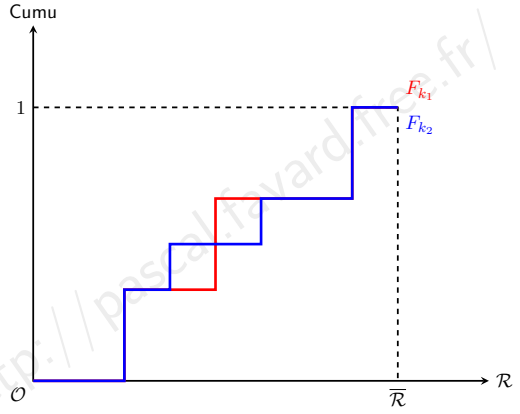
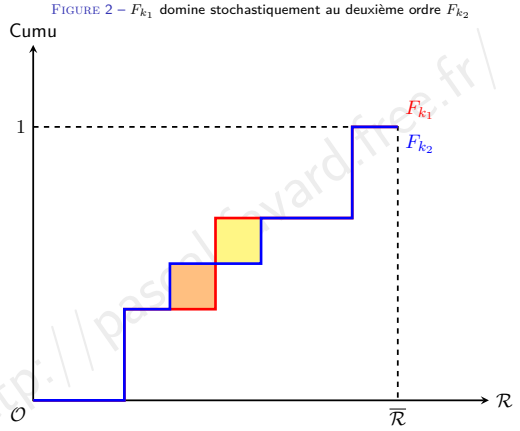


FIGURE 2 – F_{k_1} domine stochastiquement au deuxième ordre F_{k_2}



1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

Un marché de l'assurance ?

- Votre revenu est $\mathcal{R}$ et vous possédez une voiture d'une valeur à l'argus $a > 0$, la probabilité d'accident est $\mathbf{p}$ et dans ce cas $a = 0$. Pour obtenir une indemnité I en cas d'accident il faut payer une prime rI, $r \in (0, 1]$. c le coût de l'assureur, avec $c < rI$.

$$\mathscr{P}_{assuré} \left| \begin{array}{l} \underset{\{I\}}{\text{Max}} \ \mathbb{E}(SNC) = \mathbf{p}\left(\mathcal{R} + (1-r)I\right) + (1-\mathbf{p})\left(\mathcal{R} - rI + a\right) \\ slc \ 0 \leq I \leq a \end{array} \right. \quad (1)$$

CN1 (1)$\Rightarrow$ Si $\mathbf{p} < r$ alors $I^* = 0$ et si $\mathbf{p} > r$ alors $I^* = a$.

Pas de marché !

$$\mathscr{P}_{assureur} \left| \begin{array}{l} \underset{\{I\}}{\text{Max}} \ \mathbb{E}(\pi) = \mathbf{p}\left((r-1)I - c\right) + (1-\mathbf{p})\left(rI - c\right) \\ slc \ 0 \leq I \leq a \end{array} \right. \quad (2)$$

CN1 (2)$\Rightarrow$ Si $\mathbf{p} < r$ alors $I^* = a$ et si $\mathbf{p} > r$ alors $I^* = 0$. Si $\mathbf{p} = r$ alors $I^* = 0$ car $\mathbb{E}(\pi) < 0$ à cause de c.

Paradoxe de Saint-Petersbourg N. Bernoulli 1713

- Une pièce est lancée jusqu'à ce qu'elle tombe sur « face ». Le joueur reçoit 2 ducat si la pièce tombe sur « face » au premier jet, 4 ducats si la pièce tombe sur « face » au deuxième jet, 8 si la pièce tombe sur « face » au troisième jet, etc.

- L'espérance de gain est donc infinie mais qui est prêt à payer une somme très importante pour avoir le droit de jouer ? D. Bernoulli (1738) introduit la notion d'utilité (Logarithme de la richesse).

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

http://pascal.favard.free.fr/

Les 8000 ducats de Sempronius

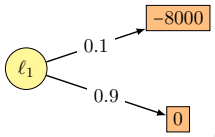


FIGURE 3 – Un bateau :

$$\mathbb{E}(\ell_1) = 800$$

Les 8000 ducats de Sempronius

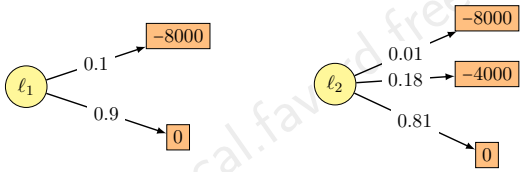


FIGURE 3 – Un bateau :

$$\mathbb{E}(\ell_1) = 800$$

FIGURE 4 – Deux bateaux :

$$\mathbb{E}(\ell_2) = -800$$

Les 8000 ducats de Sempronius

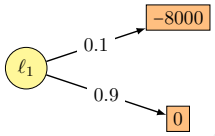


FIGURE 3 – Un bateau :

$$\mathbb{E}(\ell_1) = 800$$
$$\sigma(\ell_1) = 2400$$

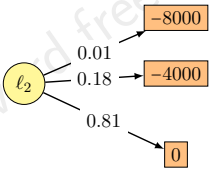


FIGURE 4 – Deux bateaux :

$$\mathbb{E}(\ell_2) = -800$$
$$\sigma(\ell_2) = 1697$$

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

Objectif

- Le but est de résumer les goûts du consommateur dans une *relation de préférence* rationnelle, continue et vérifiant l'axiome d'indépendance.
- Notons $\succsim$ cette relation de préférence.

Une relation binaire

- $\succsim$ est une relation binaire sur l'ensemble des loteries, $\mathcal{L}$. Elle permet la comparaison entre chaque paire de loteries $(\ell', \ell'') \in \mathcal{L}$.
- Si $\ell' \succsim \ell''$, on dira que j « préfère » la loterie ℓ' à la loterie ℓ''. Donc :
  1. la relation de stricte préférence, $\succ$, peut être définie par :
  $$\ell' \succ \ell'' \Leftrightarrow \ell' \succsim \ell'' \text{ mais non } \ell' \precsim \ell'',$$
  2. la relation d'indifférence, $\sim$, peut être définie par :
  $$\ell' \sim \ell'' \Leftrightarrow \ell' \succsim \ell'' \text{ et } \ell' \precsim \ell''.$$

Rationalité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est rationnelle si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *Complétude : $\forall(\ell', \ell'') \in \mathcal{L}$ on a $\ell' \succsim \ell''$ et/ou $\ell' \precsim \ell''$,*
2. *Transitivité : $\forall(\ell', \ell'', \ell''') \in \mathcal{L}$ si $\ell' \succsim \ell''$ et $\ell'' \succsim \ell'''$, alors $\ell' \succsim \ell'''$.*

Risque | Relation de préférence

Rationalité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est rationnelle si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *Complétude : $\forall(\ell', \ell'') \in \mathcal{L}$ on a $\ell' \succsim \ell''$ et/ou $\ell' \precsim \ell''$,*
2. *Transitivité : $\forall(\ell', \ell'', \ell''') \in \mathcal{L}$ si $\ell' \succsim \ell''$ et $\ell'' \succsim \ell'''$, alors $\ell' \succsim \ell'''$.*

© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 5 : RISQUE & DYNAMIQUE 11-09-2017 31/79

http://pascal.favard.free.fr/

Rationalité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est rationnelle si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *Complétude :* $\forall(\ell',\ell'')\in\mathcal{L}$ *on a* $\ell'\succsim\ell''$ *et/ou* $\ell'\precsim\ell''$,
2. *Transitivité :* $\forall(\ell',\ell'',\ell''')\in\mathcal{L}$ *si* $\ell'\succsim\ell''$ *et* $\ell''\succsim\ell'''$, *alors* $\ell'\succsim\ell'''$.

Remarque : On dira que la relation $\succsim$ est un préordre complet. Notons que la propriété de réflexivité est redondante avec la complétude.

Proposition :

Si $\succsim$ est rationnelle alors :

1. $\succ$ *est irréflexive et transitive,*
2. $\sim$ *est réflexive, transitive et symétrique,*
3. *Si* $\forall(\ell',\ell'',\ell''')\in\mathcal{L}:\ell'\succ\ell''\succsim\ell'''$ *alors* $\ell'\succ\ell'''$.

Proposition :

Si $\succsim$ est rationnelle alors :

1. $\succ$ *est irréflexive et transitive,*
2. $\sim$ *est réflexive, transitive et symétrique,*
3. *Si* $\forall(\ell',\ell'',\ell''')\in\mathcal{L}:\ell'\succ\ell''\succsim\ell'''$ *alors* $\ell'\succ\ell'''$.

Proposition :

Si $\succsim$ est rationnelle alors :

1. $\succ$ *est irréflexive et transitive,*
2. $\sim$ *est réflexive, transitive et symétrique,*
3. *Si* $\forall(\ell',\ell'',\ell''')\in\mathcal{L}:\ell'\succ\ell''\succsim\ell'''$ *alors* $\ell'\succ\ell'''$.

Preuve : Cf. TD

Axiome 1 : Continuité

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ est continue si $\forall(\ell',\ell'',\ell''')\in\mathcal{L}$ *les ensembles :*

1. $\{\alpha\in[0,1]:\alpha\ell'+(1-\alpha)\ell''\succsim\ell'''\}\subset[0,1]$,
2. $\{\alpha\in[0,1]:\ell'''\succsim\alpha\ell'+(1-\alpha)\ell''\}\subset[0,1]$,

sont fermés.

Axiome 2 : Indépendance

Définition :

La relation de préférence $\succsim$ vérifie l'axiome d'indépendance si $\forall(\ell',\ell'',\ell''')\in\mathcal{L}$ *et* $\alpha\in[0,1]$ *on a :*

$$\ell'\succsim\ell'' \text{ ssi } \alpha\ell'+(1-\alpha)\ell'''\succsim\alpha\ell''+(1-\alpha)\ell'''.$$

Cet axiome n'a aucun sens appliqué sur des paniers de biens (Chapitre 1 : univers non-risqué).

Critique de Maurice Allais (1911-2010), prix Nobel 1988.

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

1944

1. John von Neumann (1903-1957) mathématicien hongrois naturalisé américain
2. Oskar Morgenstern (1902-1977) économiste allemand naturalisé américain.

http://pascal.favard.free.fr/

1944

1. John von Neumann (1903-1957) mathématicien hongrois naturalisé américain
2. Oskar Morgenstern (1902-1977) économiste allemand naturalisé américain.

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
- Fonctions d'utilité von Neumann-Morgenstern
- Loteries monétaires
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

Utilité espérée

Définition :

La fonction d'utilité U est appelée fonction d'utilité (espérée) de type von Neumann-Morgenstern (vNM) si pour toute loterie $\ell \in \mathcal{L}$ le niveau d'utilité associé est l'espérance mathématique de la v.a. discrète $u(\vec{x})$ à valeurs finies :

$$U : \begin{cases} \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \ell & \longmapsto & U(\ell) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{p}_n u(\vec{x}_n). \end{cases}$$

Rq : Linéarité par rapport aux probabilités. Parfois $u(\cdot)$ est appelée fonction d'utilité de type Bernoulli.

Proposition :

Une fonction d'utilité U est de type vNM ssi $\forall \ell_k \in \mathcal{L}$ elle vérifie : $U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \ell_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(\ell_k)$ avec $k = 1, \ldots, K, \alpha_k \in [0,1]$ et $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$.

Proposition :

Une fonction d'utilité U est de type vNM ssi $\forall \ell_k \in \mathcal{L}$ elle vérifie : $U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k \ell_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(\ell_k)$ avec $k = 1, \ldots, K, \alpha_k \in [0,1]$ et $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$.

Proposition :

Soit U une fonction d'utilité de type vNM associée à la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{L}$. $\widetilde{U}$ est une fonction d'utilité de type vNM associée à la relation de préférence $\succsim$ sur $\mathcal{L}$ ssi $\exists(\beta > 0, \gamma)$ tels que $\forall \ell \in \mathcal{L} : \widetilde{U}(\ell) = \beta U(\ell) + \gamma$.

Théorème de l'utilité espérée

Théorème :

Supposons que la relation de préférence rationnelle $\succsim$ sur $\mathcal{L}$ soit continue et vérifie l'axiome d'indépendance. Alors $\succsim$ peut être représentée par une fonction d'utilité U de type vNM. Donc $\forall(\ell, \ell') \in \mathcal{L}$ on a :

$$\ell \succsim \ell' \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{p}_n u(\vec{x}_n) \geq \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{p}'_n u(\vec{x}_n).$$

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
- Fonctions d'utilité von Neumann-Morgenstern
- Loteries monétaires
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

- Soit R une v.a. réelle et F_R la fonction de répartition de cette v.a.,

$$F_R : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ \mathcal{R} & \longmapsto & F_R(\mathcal{R}) = \mathbf{P}(\mathrm{R} \leq \mathcal{R}). \end{cases}$$

- Soit f_R la fonction de densité de cette v.a. :

$$\forall \mathcal{R} \in \mathbb{R}, F_R(\mathcal{R}) = \int_{-\infty}^{\mathcal{R}} f_R(t)\mathrm{d}t.$$

- Soit $\ell \in \mathcal{L}$ une loterie avec $\ell = (f_R; \mathrm{R})$.

http://pascal.favard.free.fr/

- Soit $v(\vec{p}, \mathcal{R})$ la fonction d'utilité indirecte,
- soit U un fonction d'utilité vNM, $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- l'utilité de la loterie ℓ est donnée par : $U(\ell) = \int v(t) f(t) \mathrm{d}t$,

avec $\ell \gtrsim \ell'$ ssi $U(\ell) \geq U(\ell')$.

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

Définition :

Soit $\mathbb{E}(\mathrm{R}) = \int \mathcal{R} f(\mathcal{R}) \mathrm{d}\mathcal{R}$. *Un agent économique a une aversion au risque ssi :*

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, U(\ell) \leq v(\mathbb{E}(\mathrm{R})).$$

Définition :

Soit $\mathbb{E}(\mathrm{R}) = \int \mathcal{R} f(\mathcal{R}) \mathrm{d}\mathcal{R}$. *Un agent économique a une aversion au risque ssi :*

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, U(\ell) \leq v(\mathbb{E}(\mathrm{R})).$$

Proposition :

Un agent économique a une aversion (stricte) au risque ssi sa fonction d'utilité indirecte est (strictement) concave.

Définition :

Soit $\mathbb{E}(\mathrm{R}) = \int \mathcal{R} f(\mathcal{R}) \mathrm{d}\mathcal{R}$. *Un agent économique a une aversion au risque ssi :*

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, U(\ell) \leq v(\mathbb{E}(\mathrm{R})).$$

Proposition :

Un agent économique a une aversion (stricte) au risque ssi sa fonction d'utilité indirecte est (strictement) concave.

Preuve : Inégalité de Jensen

Figure 5 – Aversion au Risque

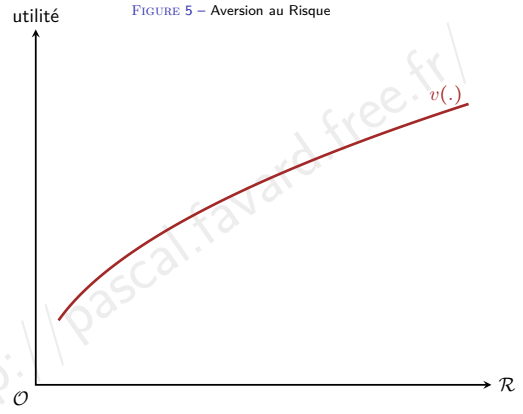


Figure 5 – Aversion au Risque

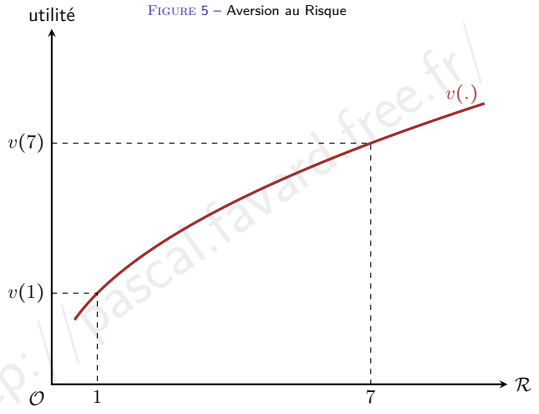


Figure 5 – Aversion au Risque

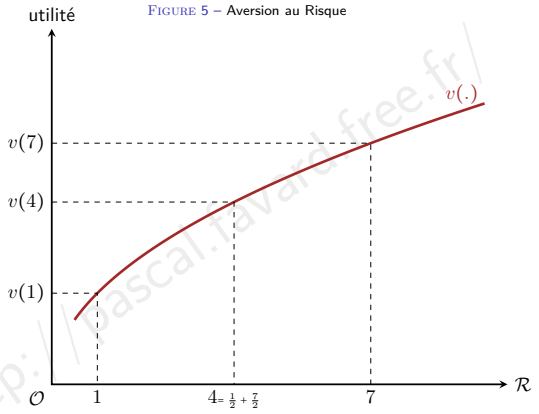


Figure 5 – Aversion au Risque

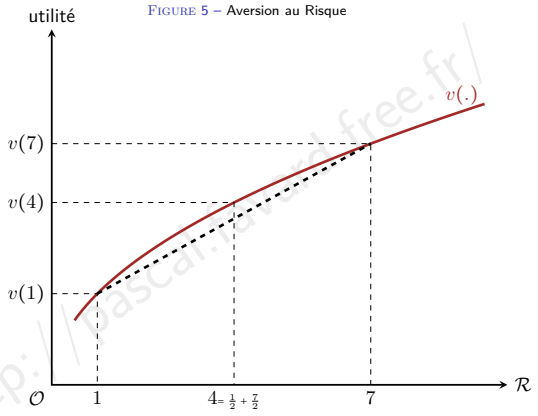
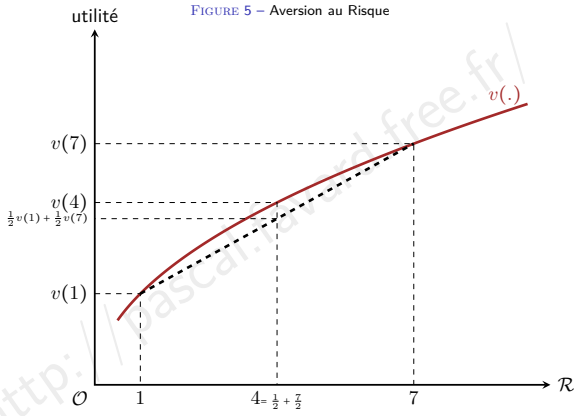


Figure 5 – Aversion au Risque



Définition :

Soit $\mathbb{E}(\mathrm{R}) = \int \mathcal{R} f(\mathcal{R}) \mathrm{d}\mathcal{R}$. *Un agent économique a une neutre au risque ssi :*

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, U(\ell) = v(\mathbb{E}(\mathrm{R})).$$

Définition :

Soit $\mathbb{E}(\mathrm{R}) = \int \mathcal{R} f(\mathcal{R}) \mathrm{d}\mathcal{R}$. *Un agent économique a une neutre au risque ssi :*

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, U(\ell) = v(\mathbb{E}(\mathrm{R})).$$

Proposition :

Un agent économique est neutre au risque ssi sa fonction d'utilité indirecte est linéaire.

Définition :

Soit $\mathbb{E}(\mathrm{R}) = \int \mathcal{R} f(\mathcal{R}) \mathrm{d}\mathcal{R}$. *Un agent économique a une neutre au risque ssi :*

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, U(\ell) = v(\mathbb{E}(\mathrm{R})).$$

Proposition :

Un agent économique est neutre au risque ssi sa fonction d'utilité indirecte est linéaire.

Preuve : Inégalité de Jensen

Figure 6 – Neutralité au Risque

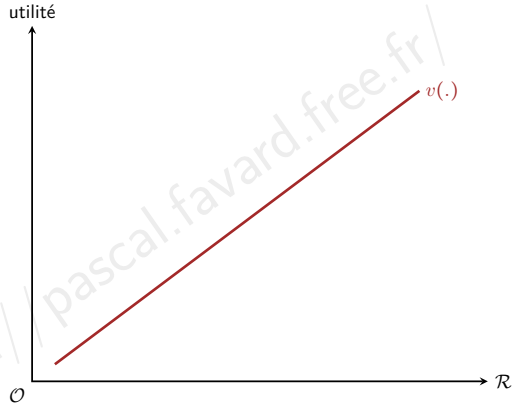


Figure 6 – Neutralité au Risque

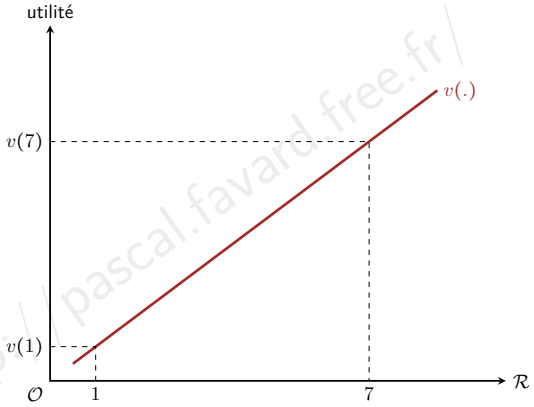
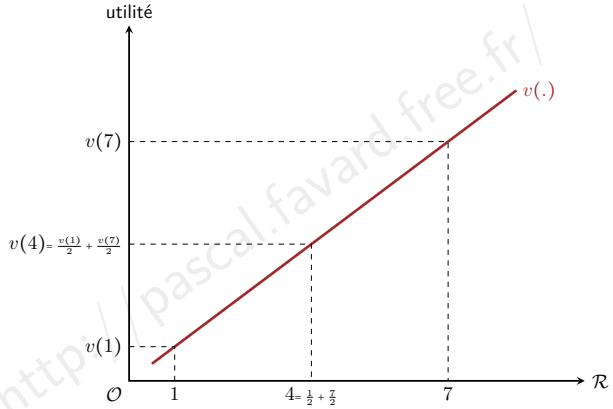


Figure 6 – Neutralité au Risque



1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
- Équivalent certain et prime de risque
- Arrow-Pratt
1.10 Extensions

Définition :

Soit $\ell \in \mathcal{L}$, U vNM et $v \in \mathcal{C}^2$ sa fonction d'utilité indirecte, on appellera, $c(\ell, v)$, équivalent certain, le montant monétaire pour lequel un agent économique est indifférent entre la loterie ℓ et avoir de façon certaine ce montant :

$$v\left(c(\ell, v)\right) = U(\ell)$$

Définition :

Soit $\ell \in \mathcal{L}$, U vNM et $v \in \mathcal{C}^2$ sa fonction d'utilité indirecte, on appellera, $c(\ell, v)$, équivalent certain, le montant monétaire pour lequel un agent économique est indifférent entre la loterie ℓ et avoir de façon certaine ce montant :

$$v\left(c(\ell, v)\right) = U(\ell)$$

Définition :

On appellera prime de risque, $\phi(\ell, v)$, le montant monétaire :

$$\phi(\ell, v) = \mathbb{E}(\mathrm{R}) - c(\ell, v)$$

La prime de risque est donc le montant maximum qu'est prêt à payer un agent pour éviter de supporter un risque.

Figure 7 – Équivalent certain de $\ell = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (1, 7)\right)$

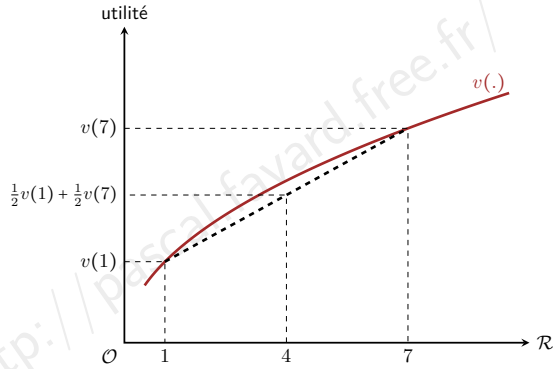


Figure 7 – Équivalent certain de $\ell = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (1, 7)\right)$

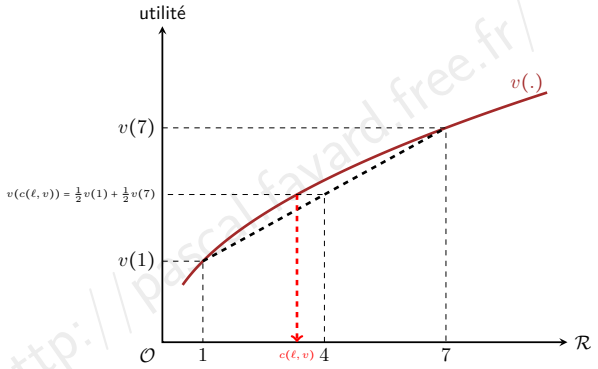
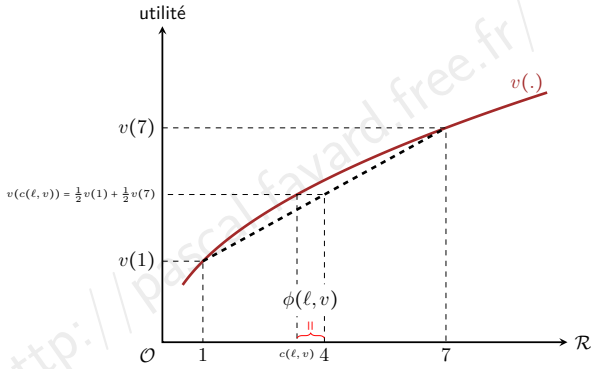


Figure 7 – Équivalent certain de $\ell = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (1, 7)\right)$



Proposition :

Soit un agent économique qui maximise sont espérance d'utilité avec $v \in \mathcal{C}^2$ sa fonction d'utilité indirecte. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *l'agent est averse au risque,*
- *$v(.)$ est concave,*
- $\forall \ell \in \mathcal{L}; c(\ell, v) \leq \mathbb{E}(\mathrm{R})$,
- $\forall \ell \in \mathcal{L}; \phi(\ell, v) \geq 0$.

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
- Équivalent certain et prime de risque
- Arrow-Pratt
1.10 Extensions

http://pascal.favard.free.fr/

Définition :

Soit $v \in \mathcal{C}^2$ une fonction d'utilité indirecte, le coefficient d'aversion absolue au risque pour un montant monétaire $\mathcal{R}$ est :

$$A(\mathcal{R}) = -\frac{v''(\mathcal{R})}{v'(\mathcal{R})}.$$

Définition :

Soit $v \in \mathcal{C}^2$ une fonction d'utilité indirecte, le coefficient d'aversion absolue au risque pour un montant monétaire $\mathcal{R}$ est :

$$A(\mathcal{R}) = -\frac{v''(\mathcal{R})}{v'(\mathcal{R})}.$$

Concept local.

Figure 8 – Degré d'aversion au risque $\ell = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (1, 7)\right)$

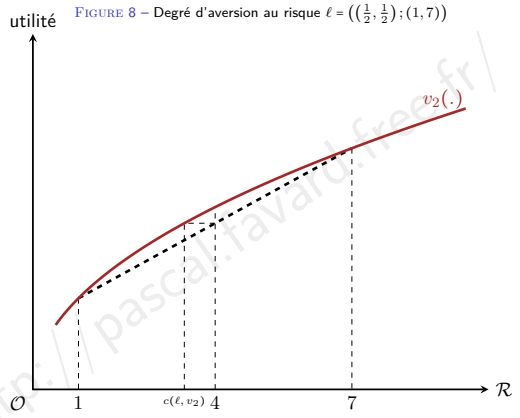


Figure 8 – Degré d'aversion au risque $\ell = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (1, 7)\right)$

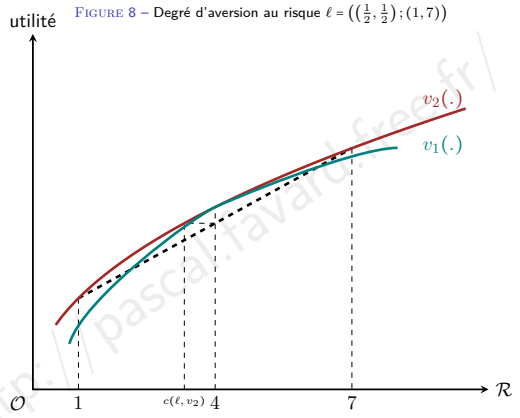


Figure 8 – Degré d'aversion au risque $\ell = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (1, 7)\right)$

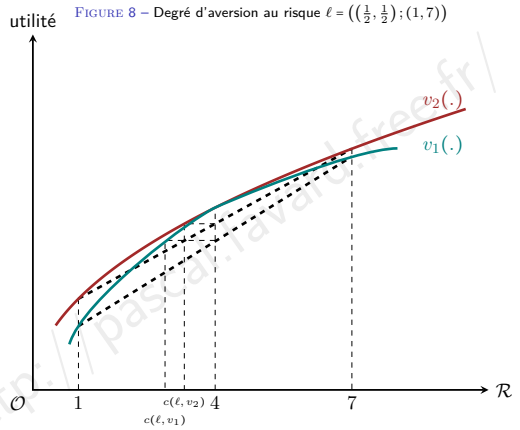
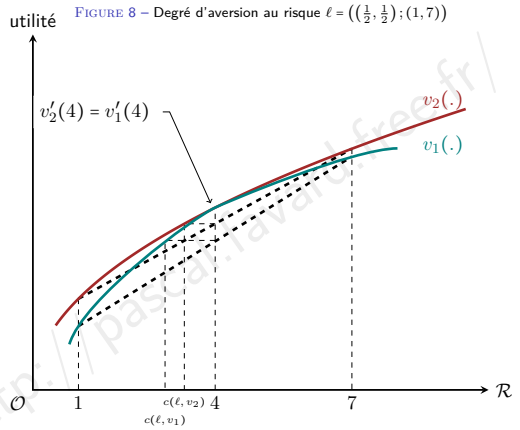


Figure 8 – Degré d'aversion au risque $\ell = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); (1, 7)\right)$



Définition :

Soit $v \in \mathcal{C}^2$ la fonction d'utilité indirecte d'un agent économique, on dira que l'aversion absolue au risque de cet agent est décroissante si $A(\mathcal{R})$ est une fonction décroissante par rapport à $\mathcal{R}$.

Définition :

Soit $v \in \mathcal{C}^2$ la fonction d'utilité indirecte d'un agent économique, on dira que l'aversion absolue au risque de cet agent est décroissante si $A(\mathcal{R})$ est une fonction décroissante par rapport à $\mathcal{R}$.

Rq : Dans ce cas l'agent prendra plus de risque si sa richesse augmente.

D'un concept local à un concept global

Théorème : (Arrow-Pratt)

On dira que l'agent 1 est plus averse au risque que l'agent 2 si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée :

- $\forall \mathcal{R} \in \mathbb{R}^+, A_1(\mathcal{R}) \geq A_2(\mathcal{R})$,
- $\forall \ell \in \mathcal{L}, \phi(\ell, v_1) \geq \phi(\ell, v_2)$,
- $\forall \ell \in \mathcal{L}, c(\ell, v_1) \leq c(\ell, v_2)$.

D'un concept local à un concept global

Théorème : (Arrow-Pratt)

On dira que l'agent 1 est plus averse au risque que l'agent 2 si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée :

- $\forall \mathcal{R} \in \mathbb{R}^+, A_1(\mathcal{R}) \geq A_2(\mathcal{R})$,
- $\forall \ell \in \mathcal{L}, \phi(\ell, v_1) \geq \phi(\ell, v_2)$,
- $\forall \ell \in \mathcal{L}, c(\ell, v_1) \leq c(\ell, v_2)$.

Rq : v_2 est « moins concave » que v_1. En fait v_1 est une transformation concave de v_2.

Définition :

Soit $v \in \mathcal{C}^2$ une fonction d'utilité indirecte, le coefficient d'aversion relative au risque pour un montant monétaire $\mathcal{R}$ est :

$$a(\mathcal{R}) = -\frac{\mathcal{R}v''(\mathcal{R})}{v'(\mathcal{R})} = \mathcal{R}A(\mathcal{R}).$$

Définition :

Soit $v \in \mathcal{C}^2$ une fonction d'utilité indirecte, le coefficient d'aversion relative au risque pour un montant monétaire $\mathcal{R}$ est :

$$a(\mathcal{R}) = -\frac{\mathcal{R}v''(\mathcal{R})}{v'(\mathcal{R})} = \mathcal{R}A(\mathcal{R}).$$

Concept local.

Typologie

Définition :

Soit $v \in \mathcal{C}^2$ une fonction d'utilité indirecte, cette fonction est :

- *IARA (Increasing Absolute Risk Aversion) si* $\forall \mathcal{R}, \dfrac{\mathrm{d}A(\mathcal{R})}{\mathrm{d}\mathcal{R}} > 0$,
- *DARA (Decreasing Absolute Risk Aversion) si* $\forall \mathcal{R}, \dfrac{\mathrm{d}A(\mathcal{R})}{\mathrm{d}\mathcal{R}} < 0$,
- *CARA (Constant Absolute Risk Aversion) si* $\forall \mathcal{R}, A(\mathcal{R}) = \overline{A}$,
- *CRRA (Constant Relative Risk Aversion) si* $\forall \mathcal{R}, a(\mathcal{R}) = \overline{a}$.

etc.

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions

Définition :

Soit $v_j \in \mathcal{C}^2$ la fonction d'utilité indirecte de l'agent $j = 1, 2$, l'agent 1 est fortement plus averse au risque que l'agent 2 si et seulement :

$$\underset{\mathcal{R}}{Inf}\ \frac{v_1''(\mathcal{R})}{v_2''(\mathcal{R})} \geq \underset{\mathcal{R}}{Sup}\ \frac{v_1'(\mathcal{R})}{v_2'(\mathcal{R})}$$

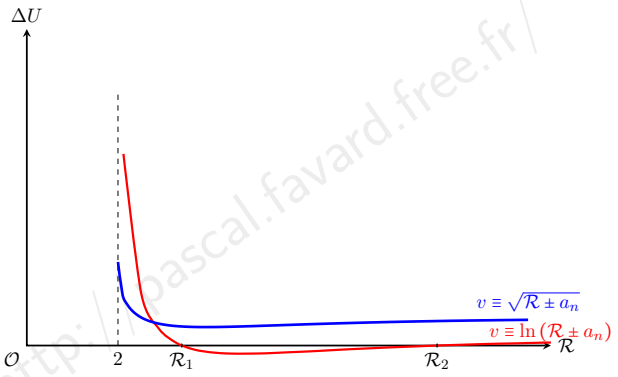
$$\Leftrightarrow \exists \lambda > 0; \forall (\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{R}_\beta) : \frac{v_1''(\mathcal{R}_\alpha)}{v_2''(\mathcal{R}_\alpha)} \geq \lambda \geq \frac{v_1'(\mathcal{R}_\beta)}{v_2'(\mathcal{R}_\beta)}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda > 0, g) \text{ avec } g' \leq 0, g'' \leq 0 : v_1(.) = \lambda v_2(.) + g(.).$$

http://pascal.favard.free.fr/

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
1.9 Aversion au risque
1.10 Extensions
- Stephen A. Ross (1981)
- David E. Bell (1988)

FIGURE 9 – David E. Bell (1988) $\Delta U = U(\ell) - U(\ell')$



1. Risque

2. Dynamique

2. Dynamique
2.1 Introduction
2.2 Contrainte budgétaire intertemporelle
2.3 Le choix du consommateur

Le consommateur est un agent économique qui est supposé :

- être rationnel
- être en information complète
- être preneur en prix
- vivre en univers non risqué
- vivre ~~une seule période~~ T périodes
  - qui consomme L biens à chaque période pour augmenter sa satisfaction
  - qui a des ressources $\mathcal{R}$

Notations vectorielles

- $\vec{x}_t \in X_t$ est son vecteur de consommation à la période t. Le vecteur de consommation en t est un vecteur colonne :

$$\vec{x}_t = \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{\ell t} \\ \vdots \\ x_{Lt} \end{bmatrix}.$$

- $\vec{p}_t$ est le vecteur prix des biens à la période t. Le vecteur prix en t est un vecteur ligne : $\vec{p}_t = [p_{1t}, p_{2t}, \ldots, p_{\ell t}, \ldots, p_{Lt}]$.

Taux

Soit :

- i_t taux d'intérêt nominal à la période t,
- r_t taux d'intérêt réel à la période t,
- g_t taux d'inflation à la période t,

alors

$$\frac{1+i_t}{1+g_t} = 1 + r_t.$$

2. Dynamique
2.1 Introduction
2.2 Contrainte budgétaire intertemporelle
2.3 Le choix du consommateur

http://pascal.favard.free.fr/

La contrainte budgétaire intertemporelle du consommateur est :

$$\boxed{\sum_{t=0}^{T} \frac{\vec{p}_t \cdot \vec{x}_t}{(1+i_t)^t} \leq \sum_{t=0}^{T} \frac{\mathcal{R}_t}{(1+i_t)^t}} \qquad (3)$$

où $\mathcal{R}_t$ est l'ensemble des ressources monétaires perçues en t, $\mathcal{R}_t \geq 0$.

La contrainte budgétaire intertemporelle du consommateur est :

$$\boxed{\sum_{t=0}^{T} \frac{\vec{p}_t \cdot \vec{x}_t}{(1+i_t)^t} \leq \sum_{t=0}^{T} \frac{\mathcal{R}_t}{(1+i_t)^t}} \qquad (3)$$

où $\mathcal{R}_t$ est l'ensemble des ressources monétaires perçues en t, $\mathcal{R}_t \geq 0$.
Notons $\vec{x} = (x_{10}, \ldots, x_{LT})$, $\vec{p} = \left(p_{10}, \ldots, \frac{p_{LT}}{(1+i_T)^T}\right)$ et $\mathcal{R} = \sum_{t=0}^{T} \frac{\mathcal{R}_t}{(1+i_t)^t}$
alors (3) peut se réécrire : $\boxed{\vec{p} \cdot \vec{x} \leq \mathcal{R}}$.

Figure 10 – Ensemble budgétaire

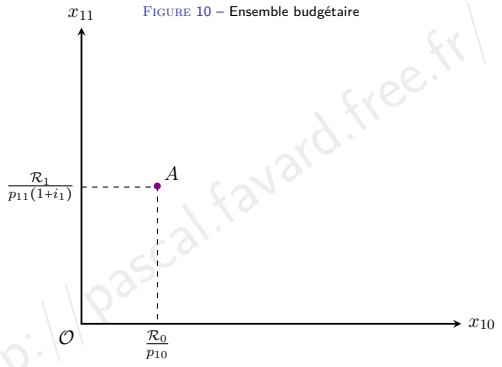


Figure 10 – Ensemble budgétaire

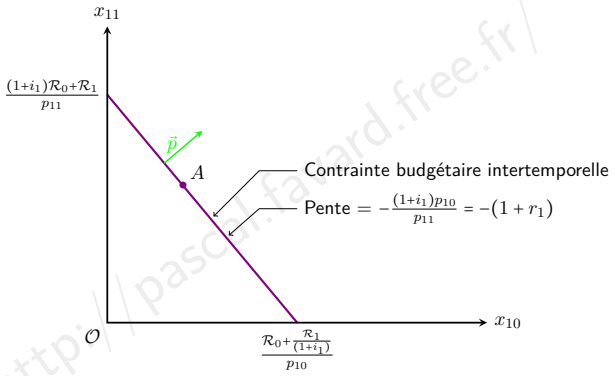
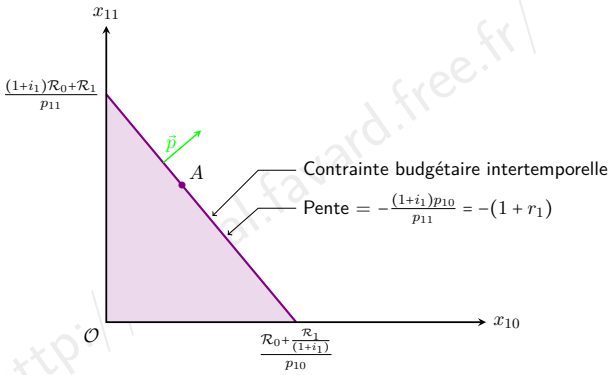


Figure 10 – Ensemble budgétaire



2. Dynamique
2.1 Introduction
2.2 Contrainte budgétaire intertemporelle
2.3 Le choix du consommateur

Soit u la fonction d'utilité intertemporelle du consommateur. Le programme que le consommateur doit résoudre est :

$$\mathscr{P}_{Consommateur} \left| \begin{array}{l} \underset{\{\vec{x} \in X\}}{\text{Max}} \; u(\vec{x}) \\ slc \; \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \mathcal{R} \end{array} \right. \qquad (4)$$

Proposition :

Si $\vec{p} \gg \vec{0}$ et $u(\cdot)$ continue alors le programme $\mathscr{P}_c$, (4), a au moins une solution.

http://pascal.favard.free.fr/

Proposition :

Si $\vec{p} \gg \vec{0}$ et $u(\cdot)$ continue alors le programme $\mathscr{P}_c$, (4), a au moins une solution.

Preuve : Si $\vec{p} \gg \vec{0}$, alors $B_{\vec{p},\mathcal{R}} = \{\vec{x} \in X : \vec{p} \cdot \vec{x} \leq \mathcal{R}\}$ est compact (fermé borné). Une fonction continue a toujours un maximum sur un compact. ■

Proposition :

Si $\vec{p} \gg \vec{0}$ et $u(\cdot)$ continue alors le programme $\mathscr{P}_c$, (4), a au moins une solution.

La solution de $\mathscr{P}_c$, sera notée : $\vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$. Chaque élément de ce vecteur représente le meilleur (si solution unique) choix de consommation de j en bien i à la date t pour chaque vecteur de prix, à $\mathcal{R}$ fixé.

Si $u(\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ alors $\exists \lambda \geq 0$ tel qu'un meilleur choix $\vec{x}^* \in \vec{x}(\vec{p},\mathcal{R})$ solution de (4), doit être solution de :

$$\mathscr{P}_C \left| \; \underset{\{\vec{x} \in X, \lambda\}}{\text{Max}} \; \mathcal{L}(\vec{x},\lambda) = u(\vec{x}) - \lambda(\vec{p} \cdot \vec{x} - \mathcal{R}) \right. \tag{5}$$

$$\text{CN1} : \begin{cases} \nabla u(\vec{x}^*) \ll \lambda \vec{p} & \left(u_{m_{\ell t}}(\vec{x}^*) = \dfrac{\lambda p_{\ell t}}{(1+i_t)^t}, \text{ si } x^*_{\ell t} > 0\right) \\ [\nabla u(\vec{x}^*) - \lambda \vec{p}] \cdot \vec{x}^* = 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{x}^* \leq \mathcal{R} \end{cases} \tag{6}$$

CS2 : à vérifier

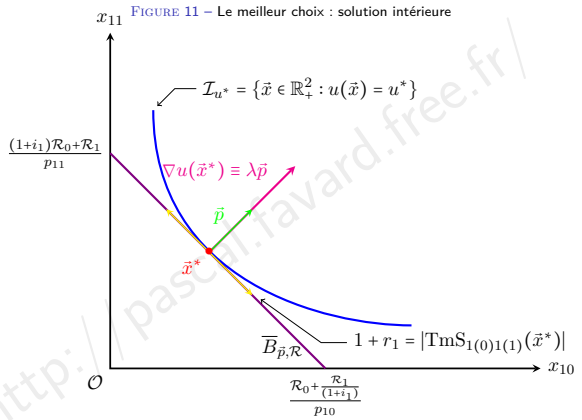
Solution intérieure

Revenons aux CN1 :

$$CN1 : \begin{cases} \nabla u(\vec{x}^*) \ll \lambda \vec{p} \\ [\nabla u(\vec{x}^*) - \lambda \vec{p}] \cdot \vec{x}^* = 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{x}^* \leq \mathcal{R} \end{cases}$$

Si $\vec{x}^* \gg \vec{0}$ alors on a une solution intérieure et donc $\nabla u(\vec{x}^*) \equiv \lambda \vec{p}$

Figure 11 – Le meilleur choix : solution intérieure



Définition :

On appellera : Taux marginal de Substitution du bien ℓ consommé à la date t au bien k consommé à la date t' évalué au panier $\vec{x}$, $\text{TmS}_{\ell(t)k(t')}(\vec{x})$, la quantité de bien k à laquelle le consommateur est prêt à renoncer à la date t' pour obtenir une unité supplémentaire de bien ℓ à la date t tout en maintenant son niveau de satisfaction au niveau de celui engendré par la consommation du panier $\vec{x}$.

Proposition :

Lorsque la fonction d'utilité est $\mathcal{C}^1$ on a donc :

$$\text{TmS}_{\ell(t)k(t')}(\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}x_{kt'}}{\mathrm{d}x_{\ell t}} = -\frac{\dfrac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_{\ell t}}}{\dfrac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_{kt'}}} = -\frac{u_{m_{\ell t}}(\vec{x})}{u_{m_{kt'}}(\vec{x})}$$

Table des matières (Diapo : 1)

1. Risque
1.1 Introduction
1.2 Les 3P
1.3 Notations
1.4 Dominance stochastique
1.5 Espérance mathématique
1.6 Variance mathématique
1.7 Relation de préférence
1.8 Utilité
- Fonctions d'utilité von Neumann-Morgenstern
- Loteries monétaires

1.9 Aversion au risque
- Équivalent certain et prime de risque
- Arrow-Pratt

1.10 Extensions

Table des matières (Diapo : 2)

- Stephen A. Ross (1981)
- David E. Bell (1988)

2. Dynamique
2.1 Introduction
2.2 Contrainte budgétaire intertemporelle
2.3 Le choix du consommateur

Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

Université François - Rabelais Tours

Les chapitres : L2 & L3

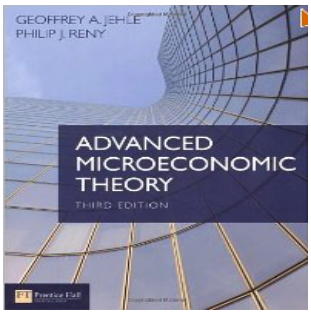
1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole
9. Équilibre de Nash

Chapitre 6 :

« Équilibre partiel »

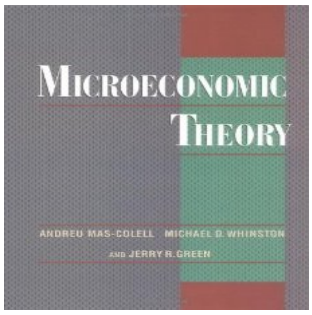
Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



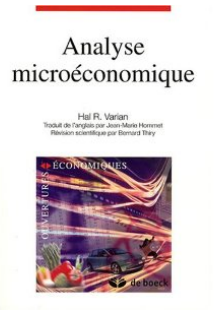
Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Plan

1. Introduction
2. Équilibre partiel à court terme
3. Équilibre partiel à long terme
4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité

1. Introduction
2. Équilibre partiel à court terme
3. Équilibre partiel à long terme
4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité

http://pascal.favard.free.fr/

Marché

Définition :

Un marché est constitué d'un groupe de personnes physiques et/ou de personnes morales en relation les unes avec les autres pour acheter ou vendre un bien homogène.

Bien

Définition :

Un bien est caractérisé par sa qualité, sa localisation dans le temps et l'espace et les conditions de sa disponibilité.

Marché concurrentiel

- Atomicité.
- Bien privé homogéne.
- Information parfaite et gratuite pour tous les agents.
- Rendements décroissants.
- Pas d'externalité

Court terme

⇒ Nombre d'entreprises fixé et quantités de certains inputs fixées.

Long terme

⇒ Nombre d'entreprises modifiable et quantités de tous les inputs ajustables.

1. Introduction

2. Équilibre partiel à court terme

3. Équilibre partiel à long terme

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel

5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité

2. Équilibre partiel à court terme
2.1 La demande agrégée
2.2 L'offre agrégée
2.3 Détermination de l'équilibre sur le marché
2.4 Existence et unicité de l'équilibre
2.5 Stabilité de l'équilibre
2.6 Surplus social à l'équilibre

- On ne considère qu'un sous ensemble de marchés, la plupart du temps un seul marché.
- Les effets richesses (revenus) sont faibles.
- Les effets substitutions sur les autres biens et donc sur les autres prix sont faibles :

⇒ on suppose que la dépense pour les autres biens est un bien composite, le numéraire.

- J consommateurs et I producteurs sur le marché du bien 2. Dans l'économie il y a L biens, $\vec{p} = [p_1, p_2, ..., p_L]$ le vecteur prix et $\vec{p}_{L-2}$ le vecteur prix sans le prix du bien 2.

- La demande agrégée de bien 2 :

$$\mathcal{D}_2(p_2) = \sum_{j=1}^{J} x_{2j}(p_2; \vec{p}_{L-2}, \mathcal{R}_j)$$

hyp

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}_2(p_2)}{\mathrm{d}p_2} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\mathrm{d}x_{2j}(\cdot)}{\mathrm{d}p_2} < 0$$

- L'élasticité-prix directe de la demande totale = la moyenne pondérée des élasticités-prix directes individuelles :

$$\varepsilon^{\mathcal{D}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{D}_2(p_2)}{\mathrm{d}p_2}\frac{p_2}{X_2} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\mathrm{d}x_{2j}(\cdot)}{\mathrm{d}p_2}\frac{p_2}{X_2} = \sum_{j=1}^{J} \frac{x_{2j}(\cdot)}{X_2}\varepsilon^j$$

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 1 – Courbe de demande inverse agrégée

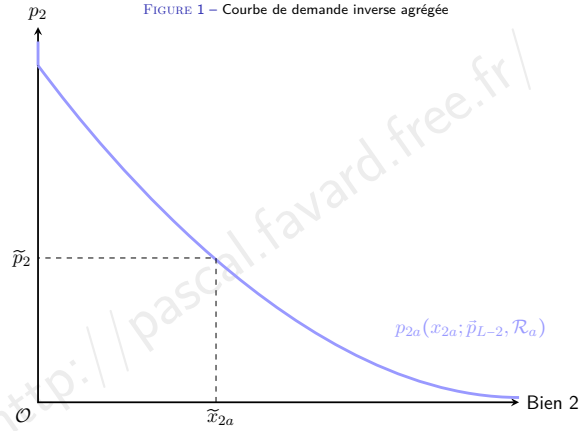


FIGURE 1 – Courbe de demande inverse agrégée

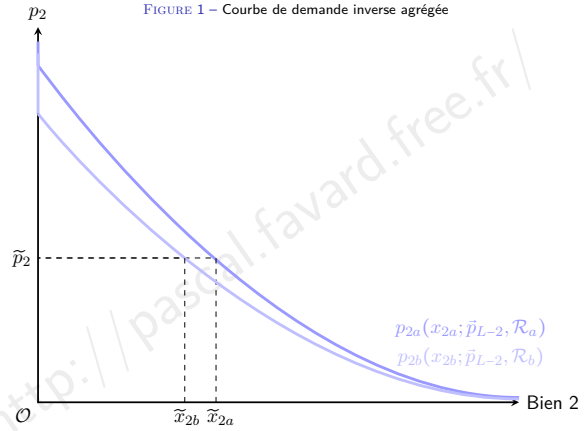
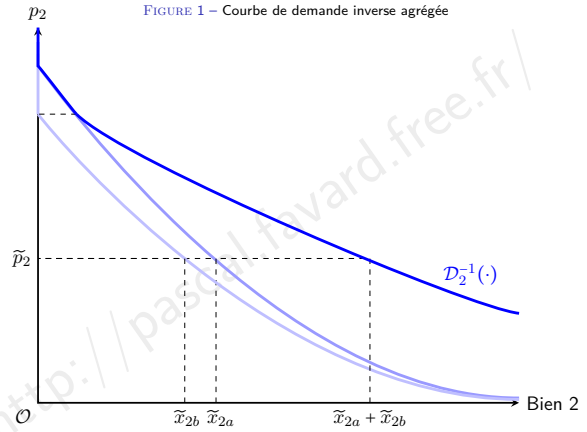


FIGURE 1 – Courbe de demande inverse agrégée



2. Équilibre partiel à court terme
2.1 La demande agrégée
2.2 L'offre agrégée
2.3 Détermination de l'équilibre sur le marché
2.4 Existence et unicité de l'équilibre
2.5 Stabilité de l'équilibre
2.6 Surplus social à l'équilibre

- L'offre agrégée de bien 2 :

$$\mathcal{S}_2(p_2) = \sum_{i=1}^{I} q_{2i}(p_2; \vec{p}_{L-2})$$

hyp

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_2(p_2)}{\mathrm{d}p_2} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\mathrm{d}q_{2i}(\cdot)}{\mathrm{d}p_2} > 0$$

- L'élasticité-prix directe de l'offre totale = la moyenne pondérée des élasticités-prix directes individuelles :

$$\mathcal{E}^{\mathcal{S}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_2(p_2)}{\mathrm{d}p_2}\frac{p_2}{Q_2} = \sum_{i=1}^{I} \frac{\mathrm{d}q_{2i}(\cdot)}{\mathrm{d}p_2}\frac{p_2}{Q_2} = \sum_{i=1}^{I} \frac{q_{2i}(\cdot)}{Q_2}\mu^i$$

FIGURE 2 – Courbe d'offre inverse agrégée

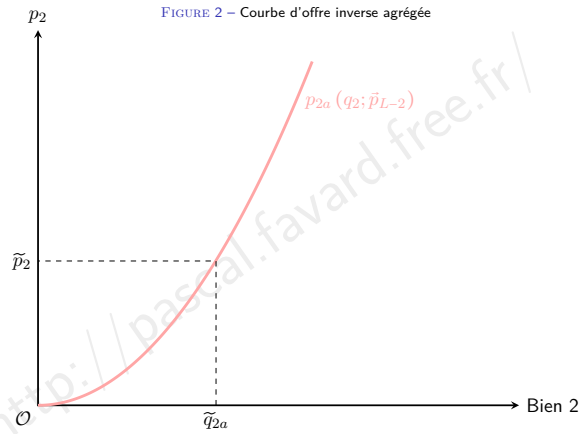


FIGURE 2 – Courbe d'offre inverse agrégée

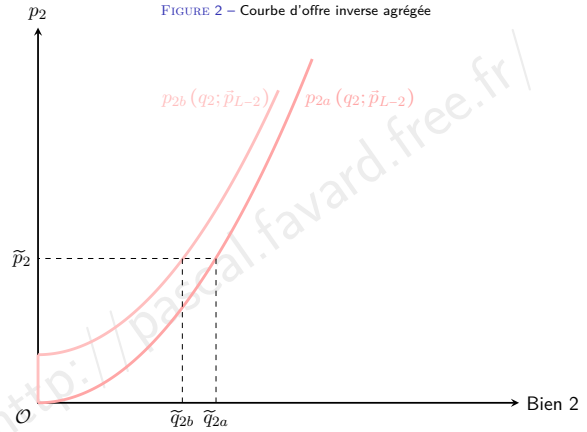
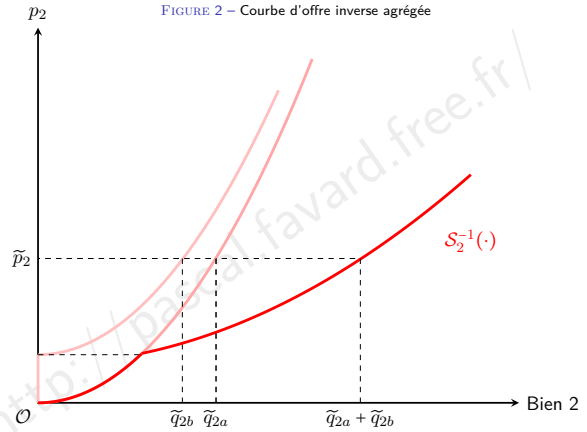


FIGURE 2 – Courbe d'offre inverse agrégée



http://pascal.favard.free.fr/

2. Équilibre partiel à court terme
2.1 La demande agrégée
2.2 L'offre agrégée
2.3 Détermination de l'équilibre sur le marché
2.4 Existence et unicité de l'équilibre
2.5 Stabilité de l'équilibre
2.6 Surplus social à l'équilibre

Équilibre

On cherche EC= (Q_2^*, p_2^*) solution de :

$$\mathcal{S}_2(p_2^*) = \mathcal{D}_2(p_2^*)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^*) = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^*)$$

Figure 3 – Équilibre partiel

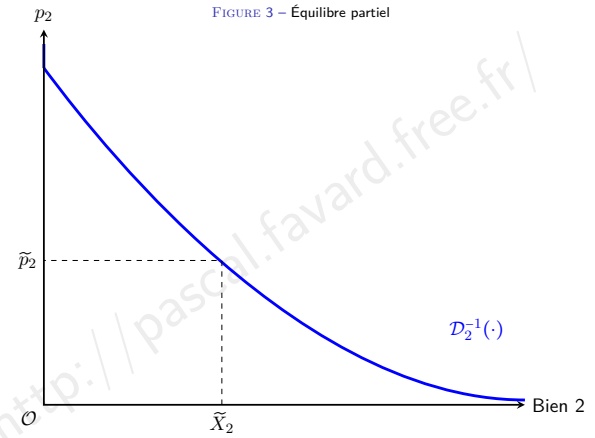


Figure 3 – Équilibre partiel

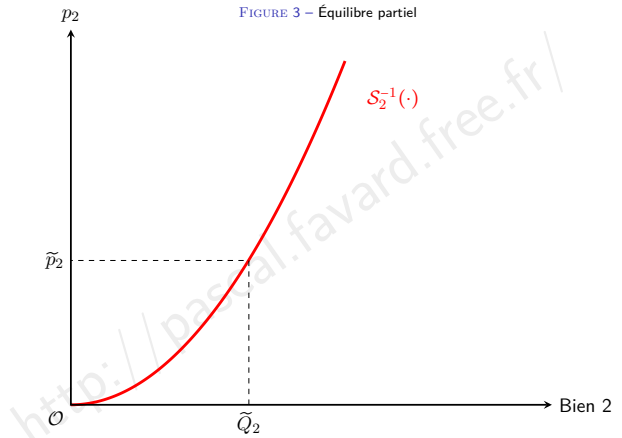


Figure 3 – Équilibre partiel

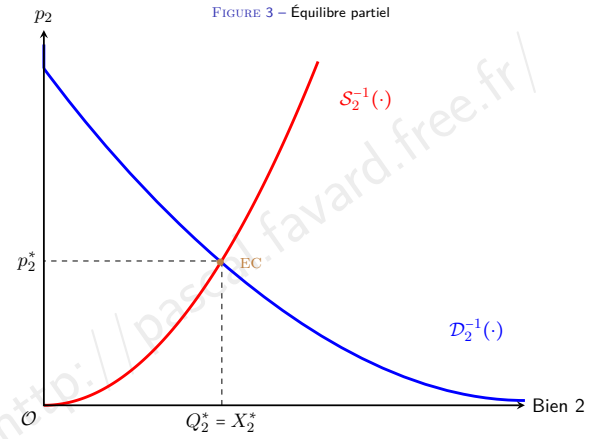


Figure 3 – Équilibre partiel

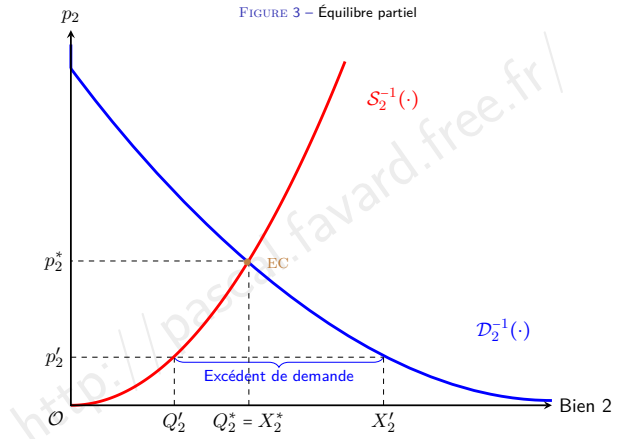
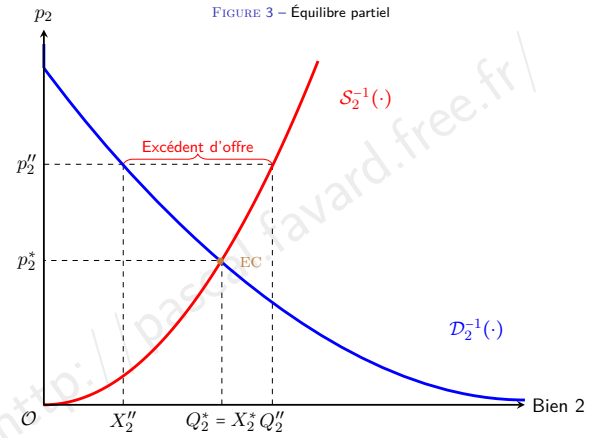


Figure 3 – Équilibre partiel



2. Équilibre partiel à court terme
2.1 La demande agrégée
2.2 L'offre agrégée
2.3 Détermination de l'équilibre sur le marché
2.4 Existence et unicité de l'équilibre
2.5 Stabilité de l'équilibre
2.6 Surplus social à l'équilibre

http://pascal.favard.free.fr/

- Existence
- Unicité

Figure 4 – Non-existence

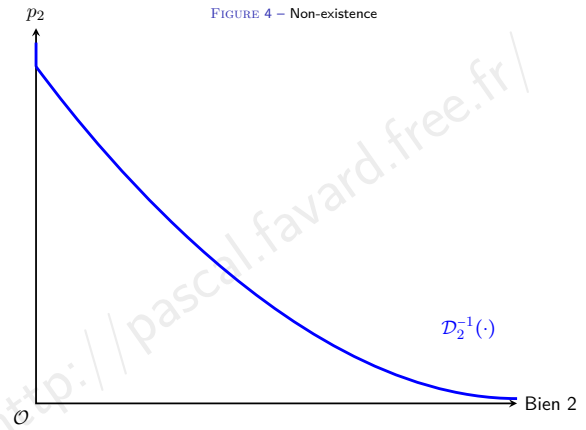


Figure 4 – Non-existence

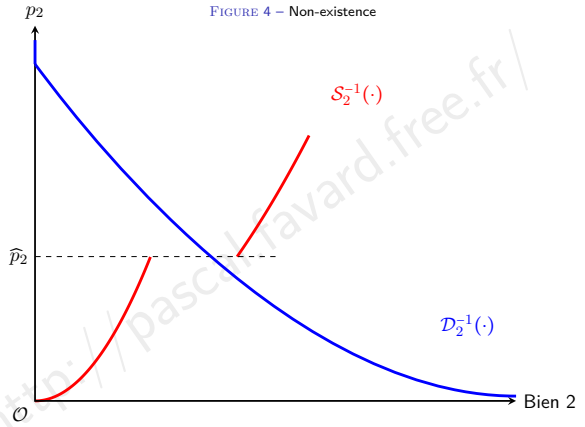


Figure 5 – Non-unicité

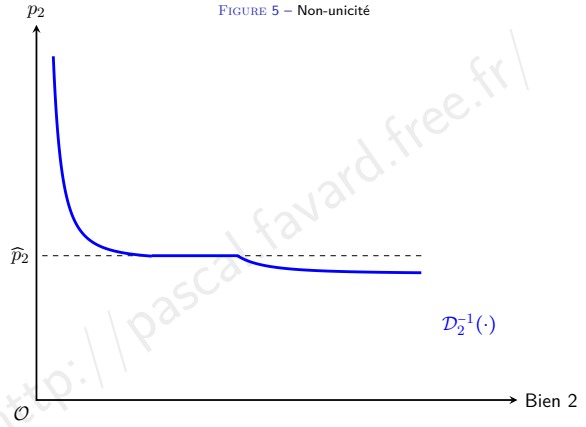


Figure 5 – Non-unicité

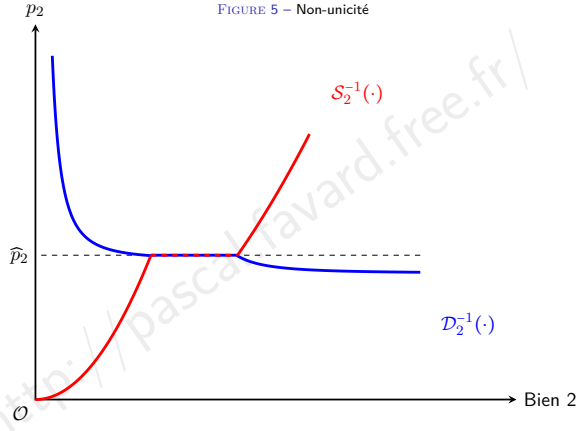
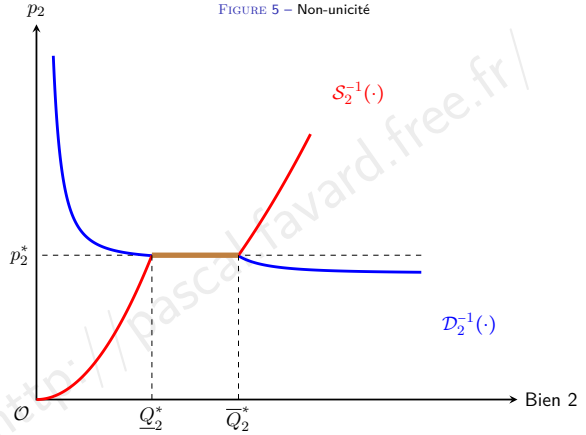
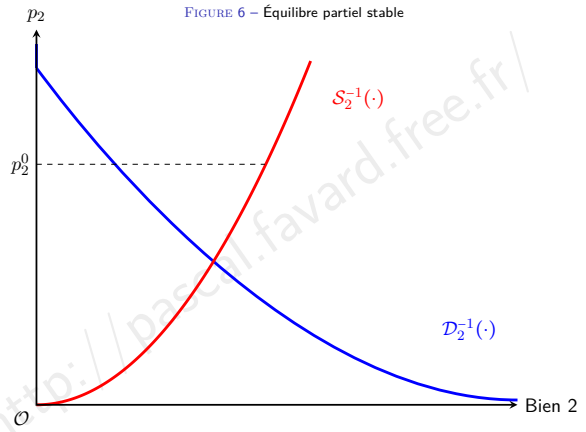


Figure 5 – Non-unicité



2. Équilibre partiel à court terme
2.1 La demande agrégée
2.2 L'offre agrégée
2.3 Détermination de l'équilibre sur le marché
2.4 Existence et unicité de l'équilibre
2.5 Stabilité de l'équilibre
2.6 Surplus social à l'équilibre

Figure 6 – Équilibre partiel stable



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 6 – Équilibre partiel stable

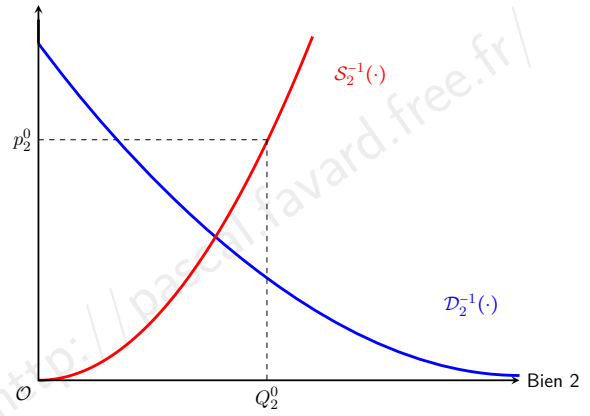


FIGURE 6 – Équilibre partiel stable

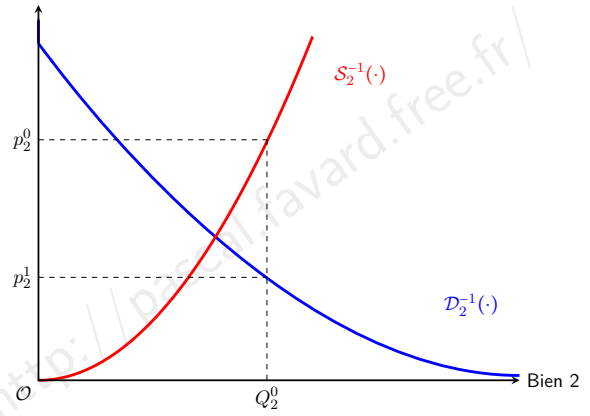


FIGURE 6 – Équilibre partiel stable

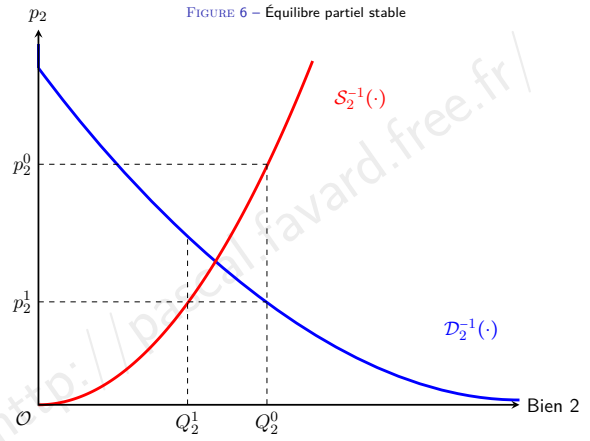


FIGURE 6 – Équilibre partiel stable

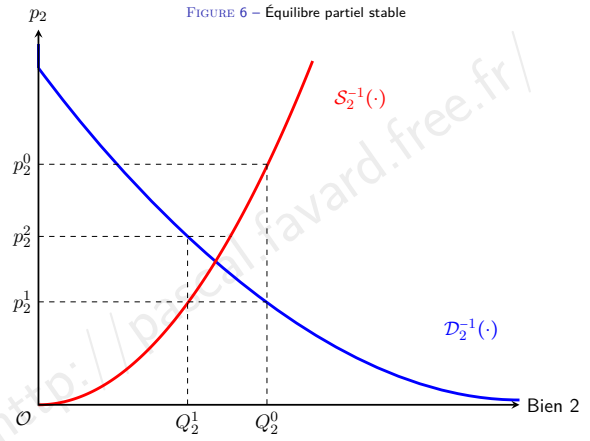


FIGURE 6 – Équilibre partiel stable

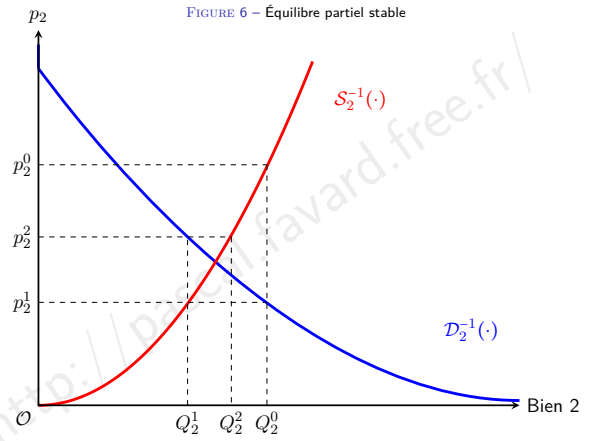


FIGURE 6 – Équilibre partiel stable

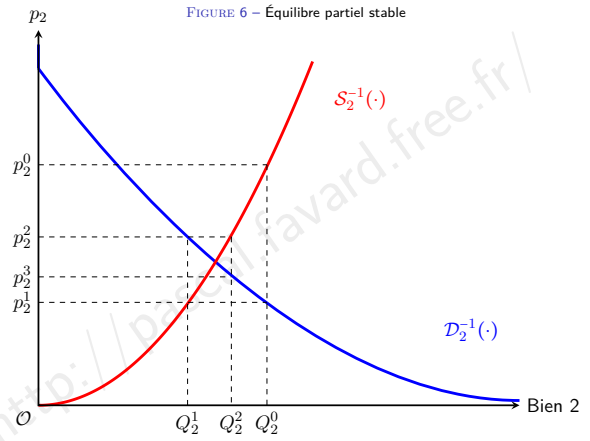


FIGURE 6 – Équilibre partiel stable

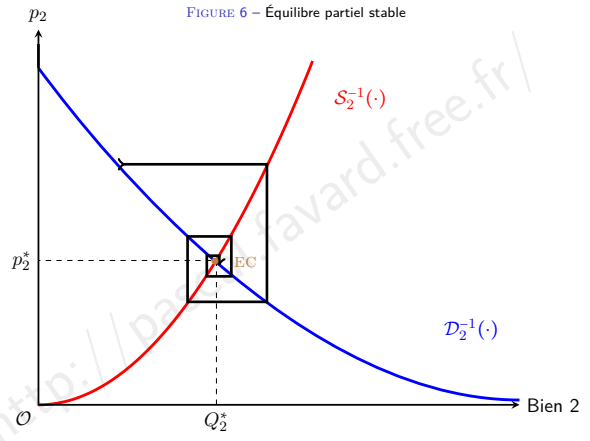
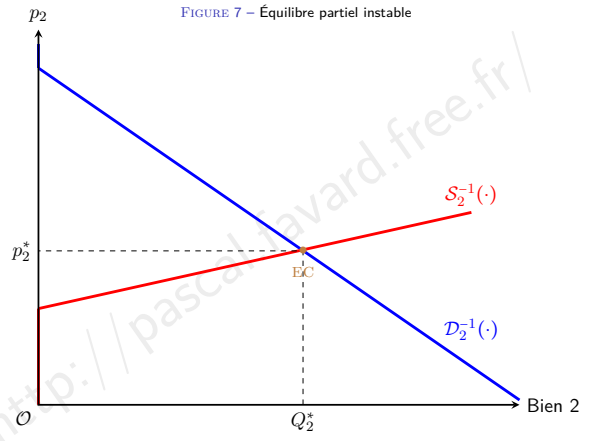
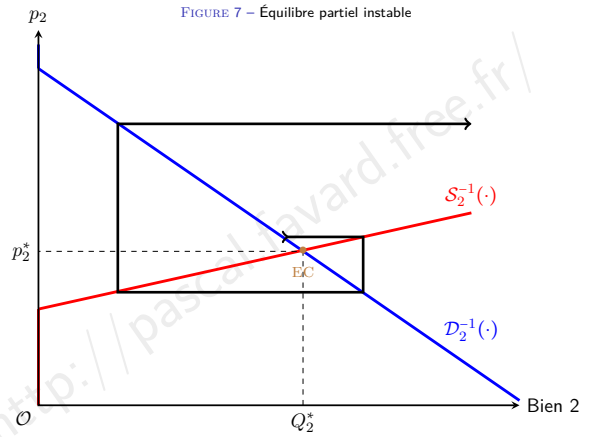


FIGURE 7 – Équilibre partiel instable



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 7 – Équilibre partiel instable



2. Équilibre partiel à court terme
2.1 La demande agrégée
2.2 L'offre agrégée
2.3 Détermination de l'équilibre sur le marché
2.4 Existence et unicité de l'équilibre
2.5 Stabilité de l'équilibre
2.6 Surplus social à l'équilibre

FIGURE 8 – Équilibre partiel

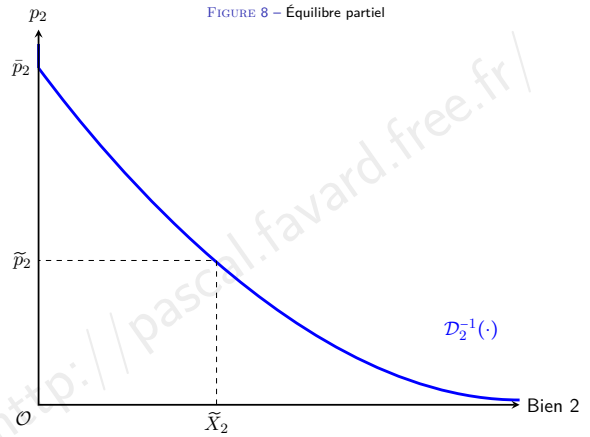


FIGURE 8 – Équilibre partiel

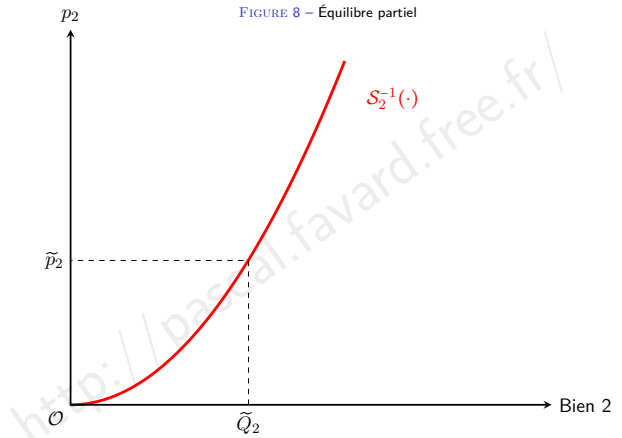


FIGURE 8 – Équilibre partiel

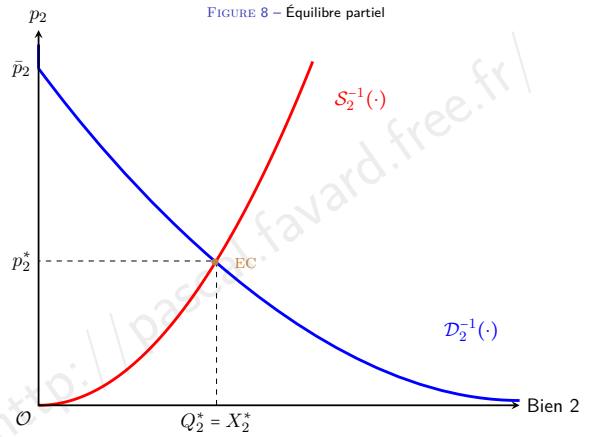


FIGURE 8 – Équilibre partiel

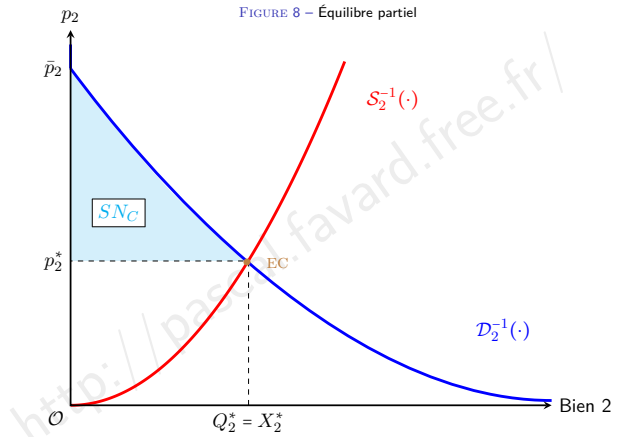


FIGURE 8 – Équilibre partiel

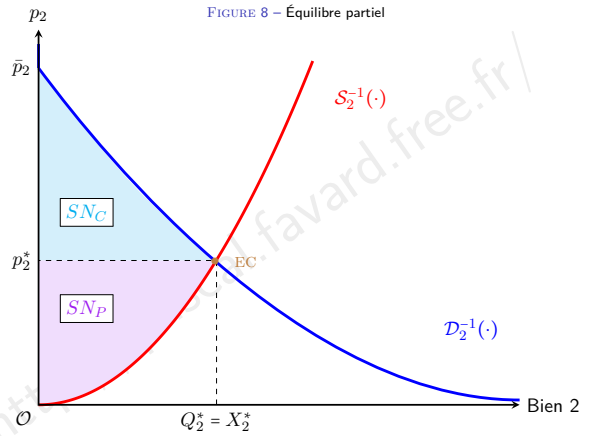
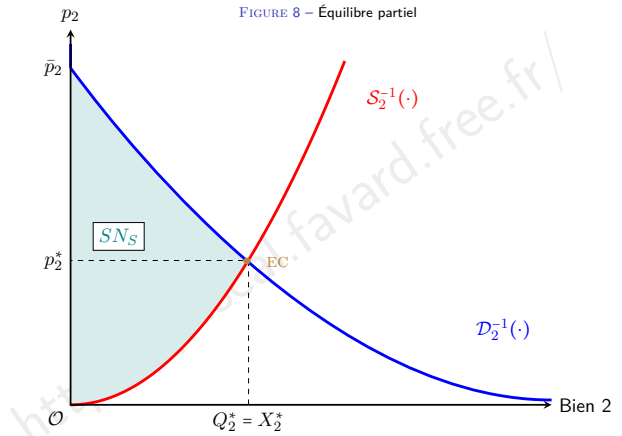


FIGURE 8 – Équilibre partiel



http://pascal.favard.free.fr/

Calcul des surplus nets à l'équilibre

$$SN_C^* = SB_C^* - p_2^* Q_2^* = \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - p_2^* Q_2^*$$

$$SN_P^* = SB_P^* - \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right] = p_2^* Q_2^* - \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]$$

$$SN_S^* = SN_C^* + SN_P^* = \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]$$

1. Introduction
2. Équilibre partiel à court terme
3. Équilibre partiel à long terme
4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité

Long terme

⇒ Nombre d'entreprises modifiable et quantités de tous inputs ajustables.

- Entreprises identiques (fonction de coût) Vs Entreprises différentes.

3. Équilibre partiel à long terme
3.1 L'offre agrégée de long terme avec entreprises identiques
3.2 L'offre agrégée de long terme avec entreprises différentes

hyp : Toutes les entreprises ont la même fonction de coût.

- À long terme le profit économique des entreprises sur un marché concurrentiel est nul.
- À long terme chaque entreprise est à son seuil de rentabilité.
- Comme elles sont identiques, elles ont le même seuil de rentabilité.

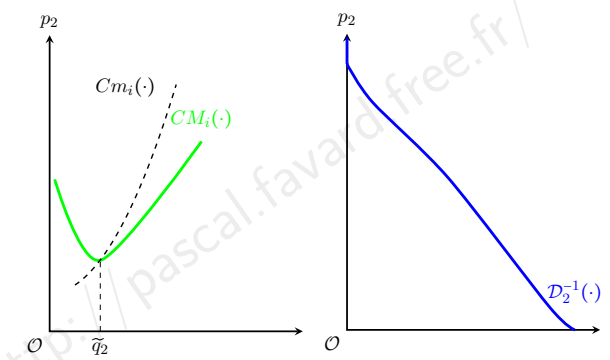


Figure 9 – Offre entreprise i Figure 10 – Offre agrégée

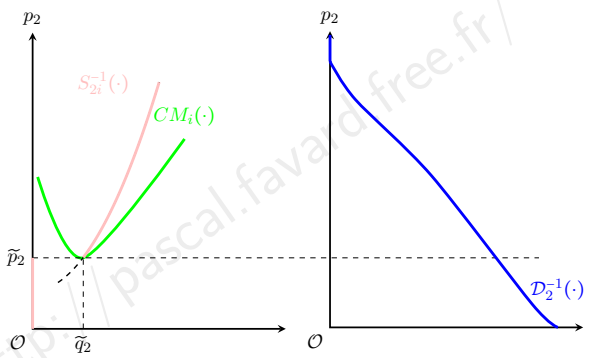


Figure 9 – Offre entreprise i Figure 10 – Offre agrégée

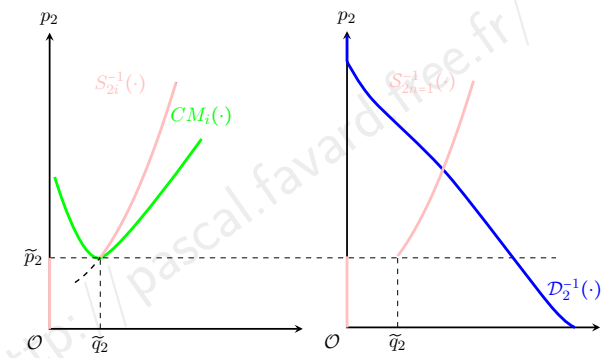


Figure 9 – Offre entreprise i Figure 10 – Offre agrégée

http://pascal.favard.free.fr/

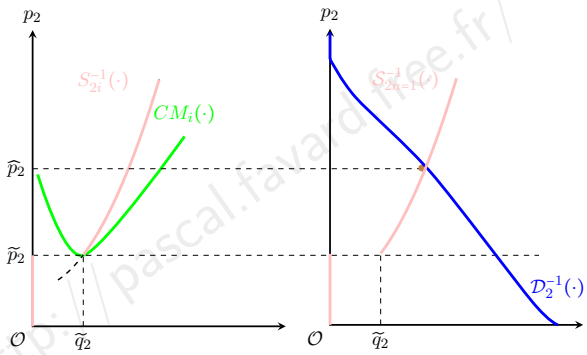


FIGURE 9 – Offre entreprise i FIGURE 10 – Offre agrégée

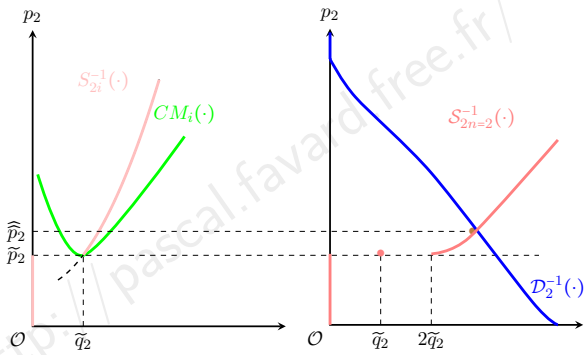


FIGURE 9 – Offre entreprise i FIGURE 10 – Offre agrégée

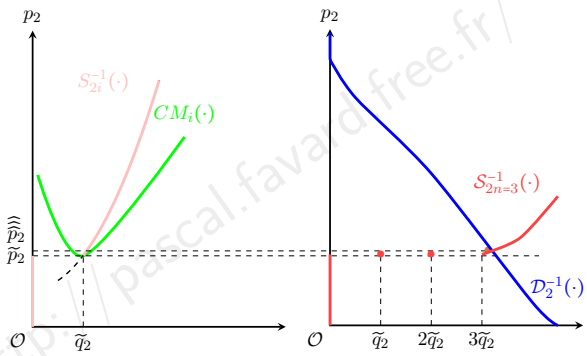


FIGURE 9 – Offre entreprise i FIGURE 10 – Offre agrégée

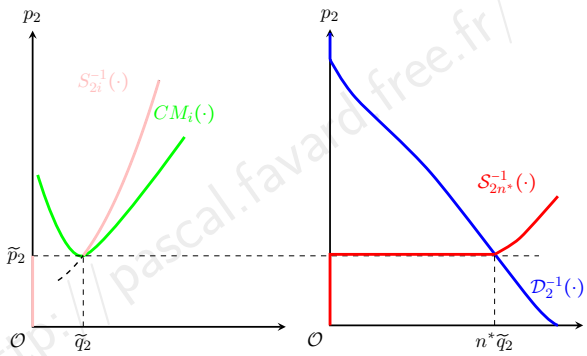


FIGURE 9 – Offre entreprise i FIGURE 10 – Offre agrégée

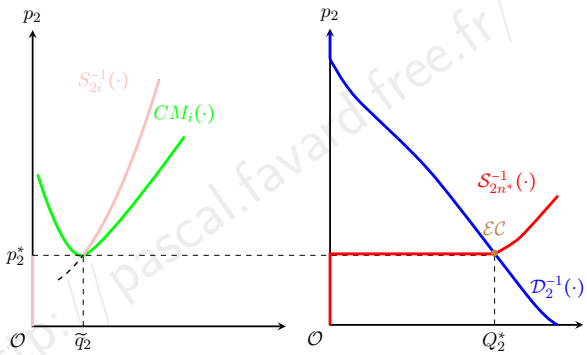


FIGURE 9 – Offre entreprise i FIGURE 10 – Offre agrégée

3. Équilibre partiel à long terme
3.1 L'offre agrégée de long terme avec entreprises identiques
3.2 L'offre agrégée de long terme avec entreprises différentes

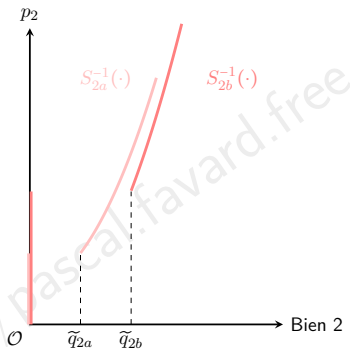


FIGURE 11 – Offre agrégée avec deux entreprises

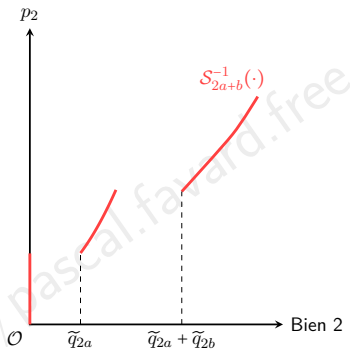


FIGURE 11 – Offre agrégée avec deux entreprises

http://pascal.favard.free.fr/

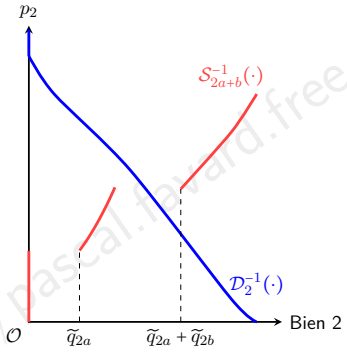


FIGURE 11 – Offre agrégée avec deux entreprises

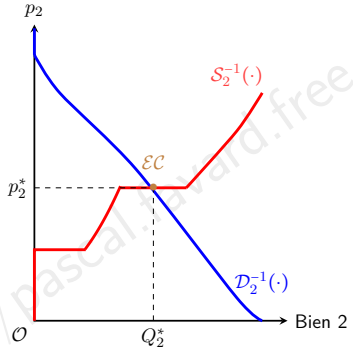


FIGURE 12 – Offre agrégée avec deux types d'entreprises

1. Introduction

2. Équilibre partiel à court terme

3. Équilibre partiel à long terme

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel

5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité

Il existe trois types de taxes (subventions) :

- Taxe à l'unité $\tau > 0$ (€/unité),
- Taxe ad-valorem $\tau > 0$ (%),
- Taxe forfaitaire $\tau > 0$ (€),
- Tous les consommateurs et tous les producteurs sont identiques.

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

- Le consommateur est taxé.
- Le producteur est taxé.

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
- Taxation des consommateurs
- Cas polaires
- Taxation des producteurs

4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

Taxation des consommateurs : la quantité

- On cherche $Q_2^\tau \neq 0 \left(\Leftrightarrow \tau < \mathcal{D}_2^{-1}(0) - \mathcal{S}_2^{-1}(0)\right)$ solution de :

$$\boxed{\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau) - \tau}$$

Or $\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^*) = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^*)$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^*) - \mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau)}_{\Delta_S} = \underbrace{\mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^*) - \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)}_{\Delta_D} + \tau \qquad (1)$$

Si $Q_2^\tau > Q_2^*$ alors $\Delta_D \geq 0$ et $\Delta_S \leq 0$ sous nos hypothèses. Donc (1) n'est pas vérifiée avec $\tau > 0$.

$\Rightarrow \boxed{Q_2^\tau \leq Q_2^*}$

http://pascal.favard.free.fr/

Taxation des consommateurs : les prix

Par construction : $p_2^{\text{TTC}} = p_2^{\text{HT}} + \tau \overset{\tau>0}{\Rightarrow} p_2^{\text{TTC}} > p_2^{\text{HT}}$

$$\boxed{p_2^{\text{HT}} = \mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) \text{ et } p_2^{\text{TTC}} = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)}$$

Or $Q_2^\tau \leq Q_2^*$ donc sous nos hypothèses :

$\Rightarrow$

$$\boxed{p_2^{\text{HT}} \leq p_2^* \text{ et } p_2^{\text{TTC}} \geq p_2^* \text{ avec } p_2^{\text{HT}} \neq p_2^{\text{TTC}}}$$

Figure 13 – Équilibre partiel

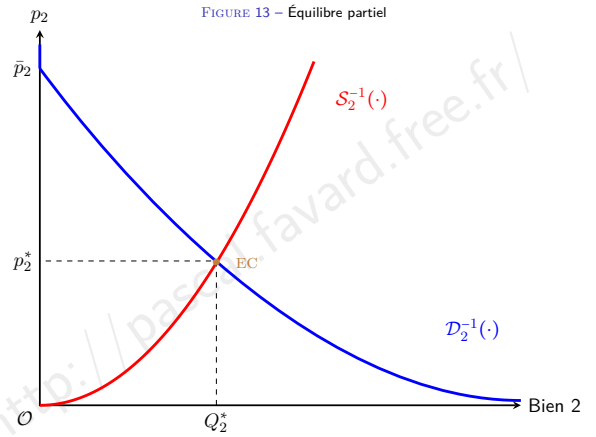


Figure 13 – Équilibre partiel

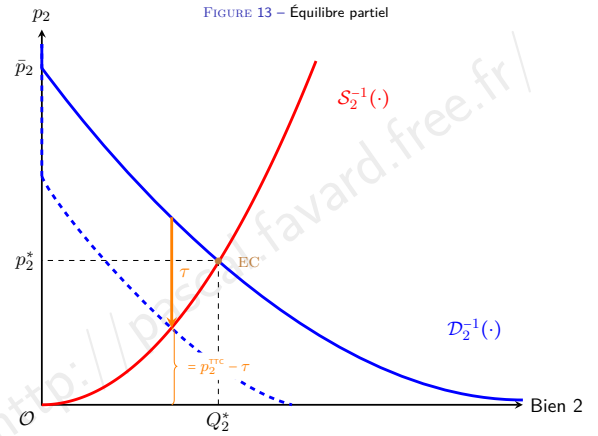


Figure 13 – Équilibre partiel

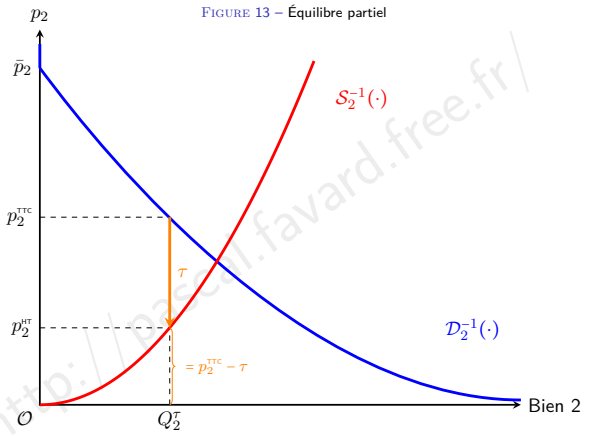


Figure 13 – Équilibre partiel

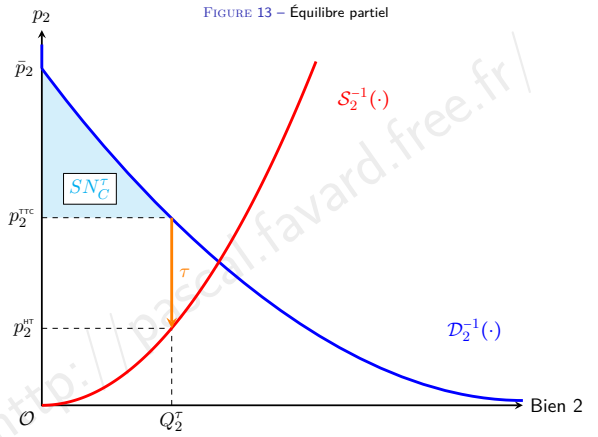


Figure 13 – Équilibre partiel

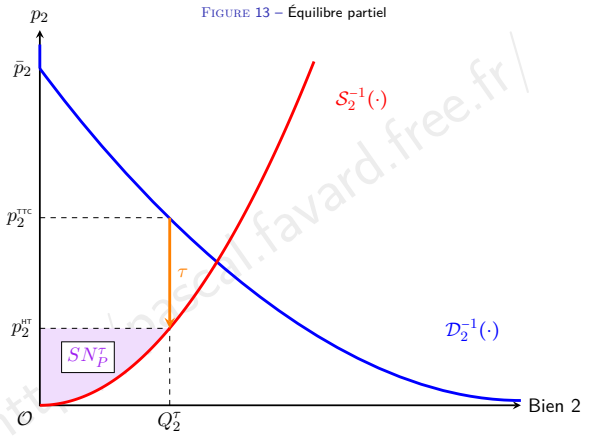


Figure 13 – Équilibre partiel

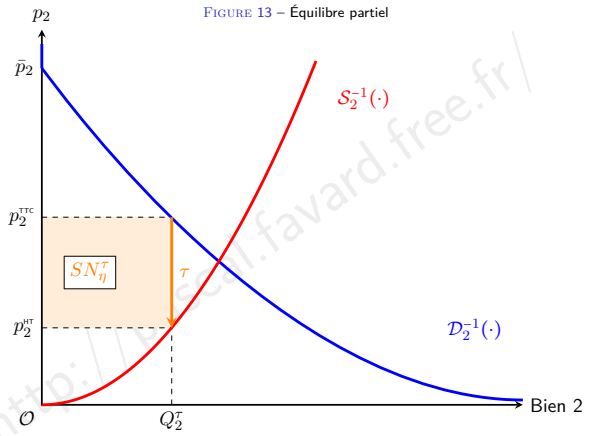
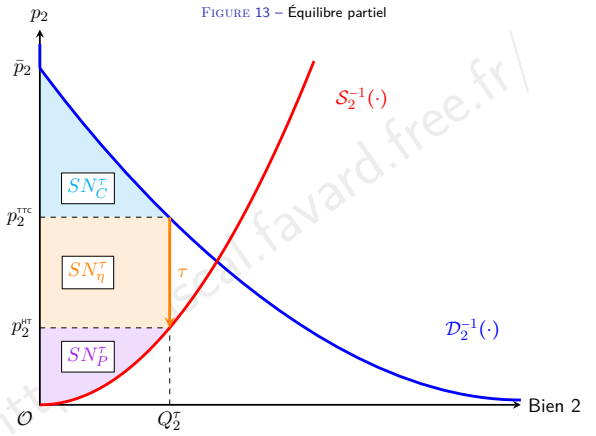


Figure 13 – Équilibre partiel



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 13 – Équilibre partiel

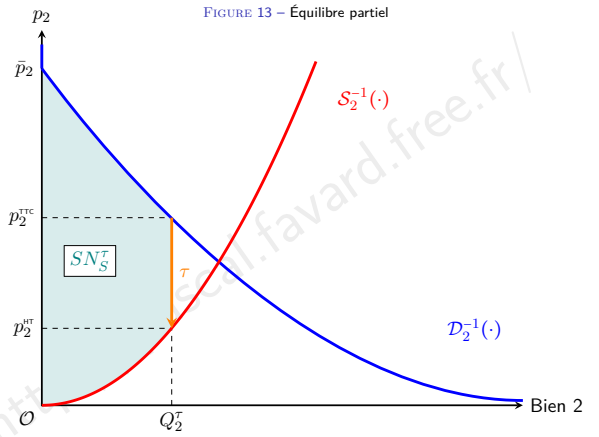
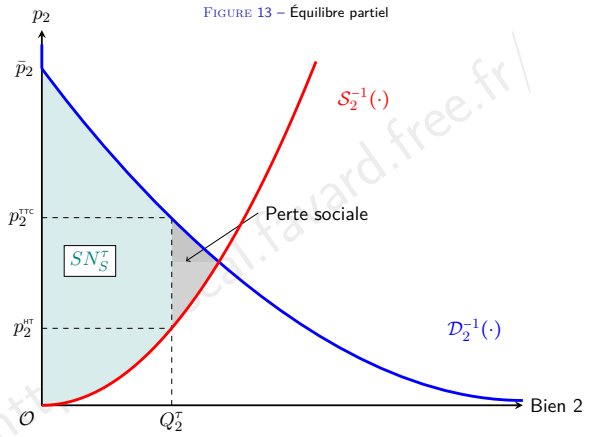


FIGURE 13 – Équilibre partiel



Calcul des surplus nets à l'équilibre

$$SN_C^\tau = \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - p_2^{HT}Q_2^\tau - \left[\left(p^{TTC} - p^{HT}\right)Q_2^\tau\right]$$

$$\Rightarrow SN_C^\tau = \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - p^{TTC}Q_2^\tau$$

$$SN_P^\tau = p_2^{HT}Q_2^\tau - \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]$$

$$SN_\eta^\tau = \left(p^{TTC} - p^{HT}\right)Q_2^\tau$$

Calcul du surplus social net à l'équilibre

$\Rightarrow$

$$\boxed{SN_S^\tau = SN_C^\tau + SN_P^\tau + SN_\eta^\tau = \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]}$$

$$\Rightarrow SN_S^* - SN_S^\tau = \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{SN_S^\tau \leq SN_S^*}$$

Perte sociale

$$\Rightarrow \text{Perte Sociale} = \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]$$

$$= \underbrace{\left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - p_2^*\left(Q_2^* - Q_2^\tau\right)} + \underbrace{p_2^*\left(Q_2^* - Q_2^\tau\right) - \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]}$$

= Baisse du surplus des consommateurs + Baisse du surplus des producteurs

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
Taxation des consommateurs
Cas polaires
Taxation des producteurs
4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

FIGURE 14 – Cas polaire 1

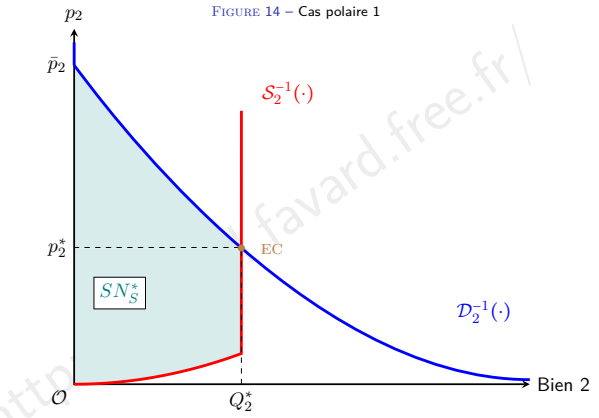
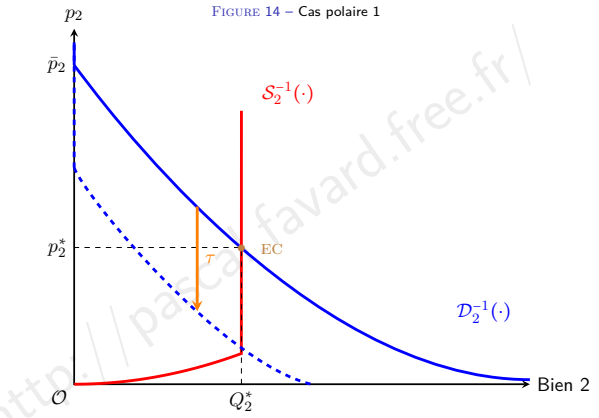


FIGURE 14 – Cas polaire 1



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 14 – Cas polaire 1

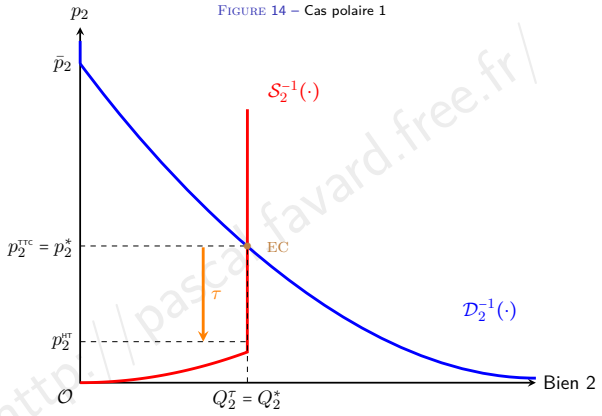


FIGURE 14 – Cas polaire 1

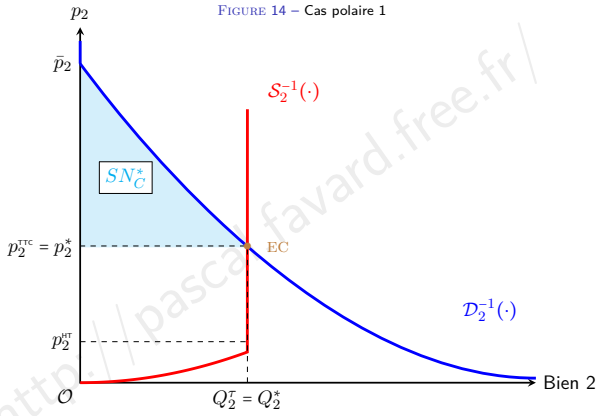


FIGURE 14 – Cas polaire 1

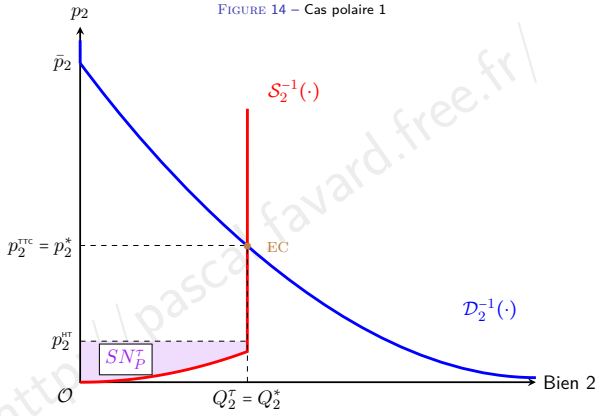


FIGURE 14 – Cas polaire 1

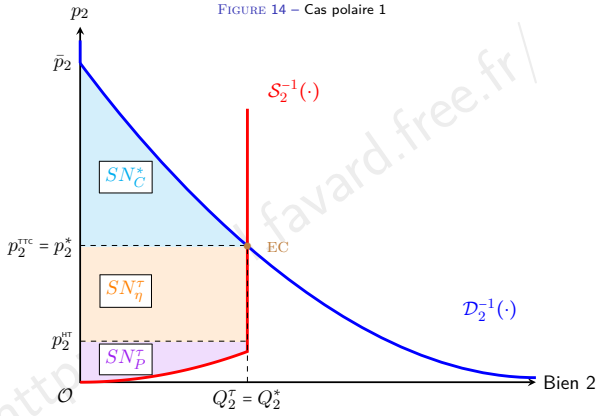


FIGURE 14 – Cas polaire 1

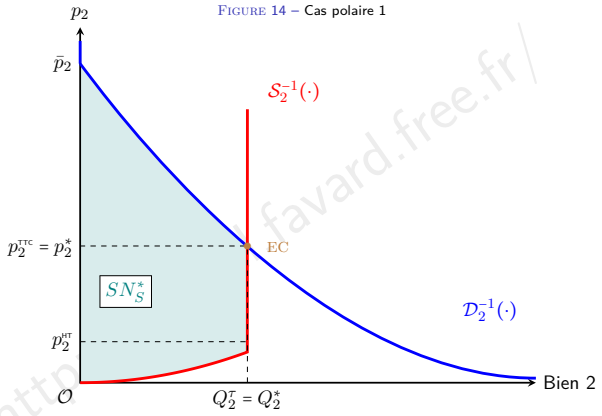


FIGURE 14 – Cas polaire 1

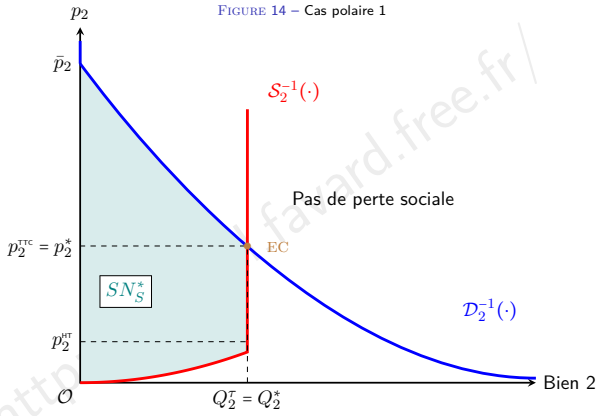


FIGURE 15 – Cas polaire 2

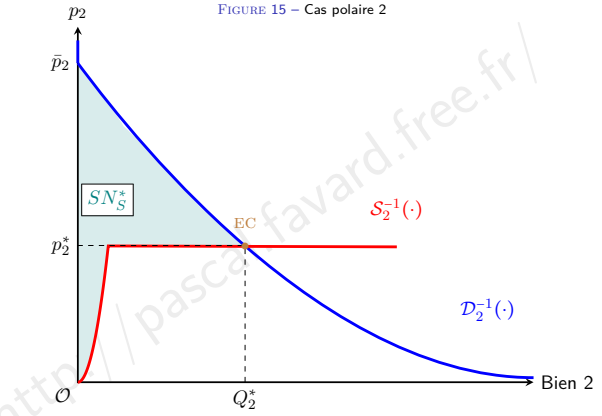
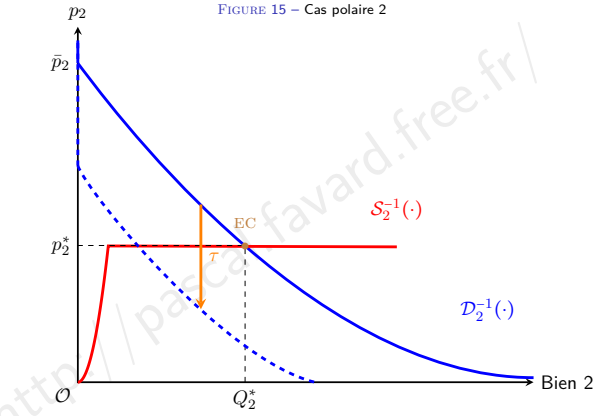


FIGURE 15 – Cas polaire 2



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 15 – Cas polaire 2

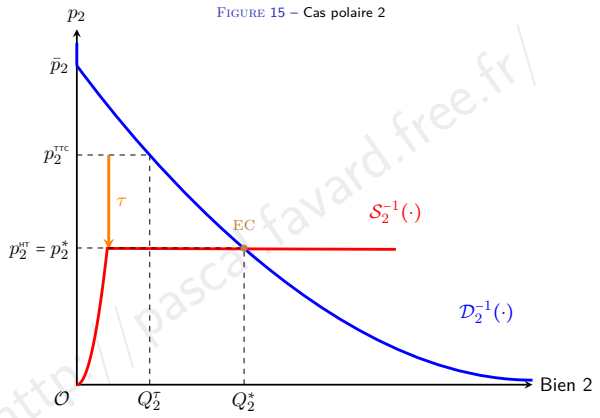


FIGURE 15 – Cas polaire 2

FIGURE 15 – Cas polaire 2

FIGURE 15 – Cas polaire 2

FIGURE 15 – Cas polaire 2

FIGURE 15 – Cas polaire 2

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
- Taxation des consommateurs
- Cas polaires
- Taxation des producteurs
4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

Taxation des producteurs

- On cherche $Q_2^\tau \neq 0 \left(\tau < \mathcal{D}_2^{-1}(0) - \mathcal{S}_2^{-1}(0)\right)$ solution de :

$$\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) + \tau = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau) - \tau$$

Même équation que si on taxe les consommateurs

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 16 – Équilibre partiel

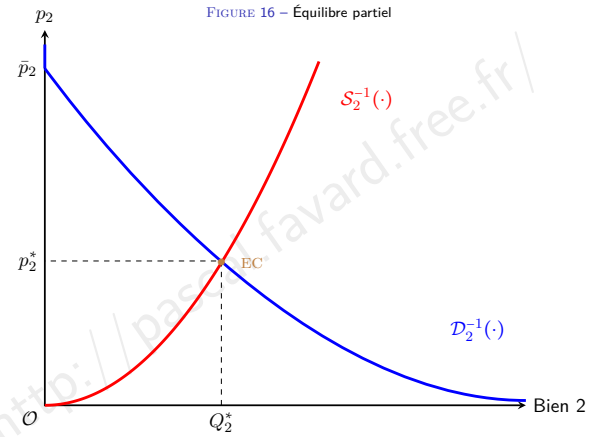


FIGURE 16 – Équilibre partiel

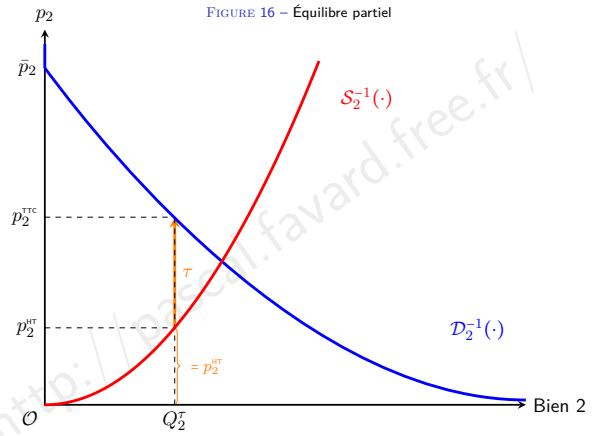


FIGURE 16 – Équilibre partiel

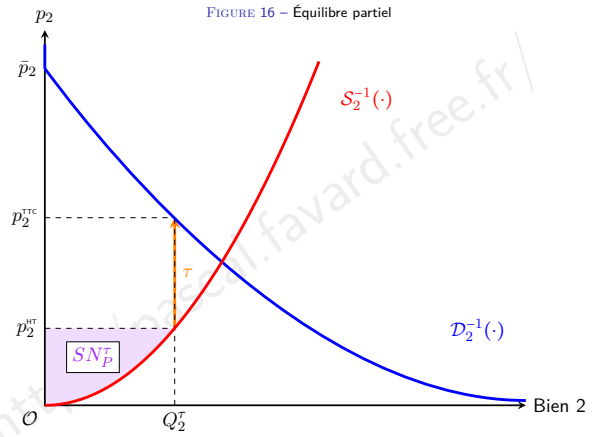


FIGURE 16 – Équilibre partiel

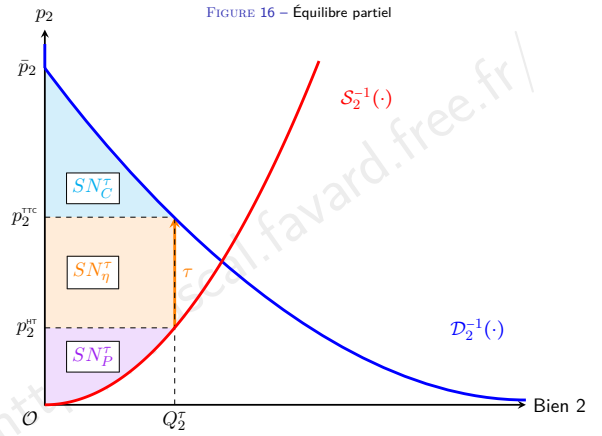


FIGURE 16 – Équilibre partiel

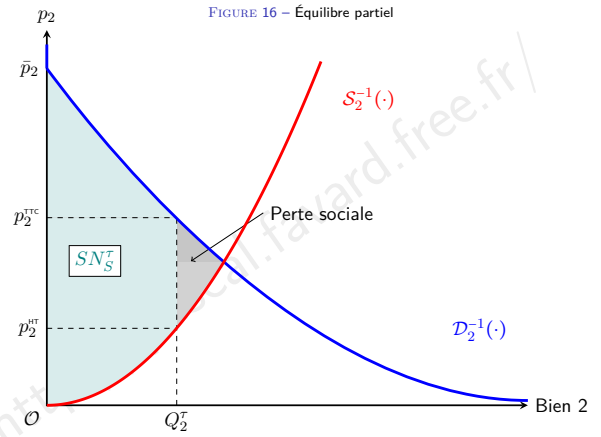
FIGURE 16 – Équilibre partiel

FIGURE 16 – Équilibre partiel

FIGURE 16 – Équilibre partiel

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 16 – Équilibre partiel



Proposition :

Une taxe à l'unité, $\tau > 0$, affecte l'équilibre de marché :

$$Q_2^\tau \leq Q_2^* \text{ et } p_2^{HT} \leq p_2^* \leq p_2^{TTC} \text{ avec } p_2^{HT} \neq p_2^{TTC}.$$

Une taxe à l'unité n'améliore ni les surplus des agents privés ni le surplus social. Qui collecte la taxe n'a pas d'importance.

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

- Les consommateurs sont taxés.
- Les producteurs sont taxés.

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
- Taxation des consommateurs
- Taxation des producteurs
4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

Taxation des consommateurs : La quantité

- On cherche $Q_2^\tau \neq 0 \left(\tau < \lim_{Q_2 \to 0} \frac{\mathcal{D}_2^{-1}(Q_2) - \mathcal{S}_2^{-1}(Q_2)}{\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2)}\right)$ solution de :

$$\boxed{\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) = \frac{\mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)}{1+\tau}}$$

Or $\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^*) = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^*)$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^*) - \mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau)}_{\Delta_S} = \overbrace{\frac{\mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^*) - \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)}{1+\tau}}^{\Delta_D} + \frac{\tau}{1+\tau}\mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^*) \quad (1)$$

Si $Q_2^\tau > Q_2^*$ alors $\Delta_S \leq 0$ et $\Delta_D \geq 0$ sous nos hypothèses. Donc (1) n'est pas vérifiée avec $\tau > 0$. $\Rightarrow \boxed{Q_2^\tau \leq Q_2^*}$

Taxation des consommateurs : les prix

Par construction : $p_2^{TTC} = (1+\tau)p_2^{HT} \overset{\tau>0}{\Rightarrow} p_2^{TTC} > p_2^{HT}$

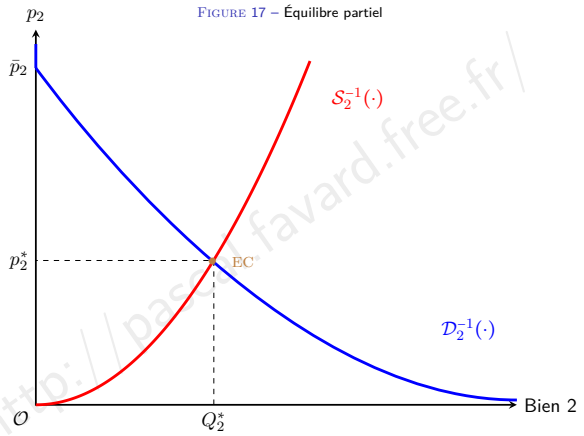
$$\boxed{p_2^{HT} = \mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) \text{ et } p_2^{TTC} = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)}$$

Or $Q_2^\tau \leq Q_2^*$ donc sous nos hypothèses :

$\Rightarrow$

$$\boxed{p_2^{HT} \leq p_2^* \text{ et } p_2^{TTC} \geq p_2^* \text{ avec } p_2^{HT} \neq p_2^{TTC}}$$

FIGURE 17 – Équilibre partiel



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 17 – Équilibre partiel

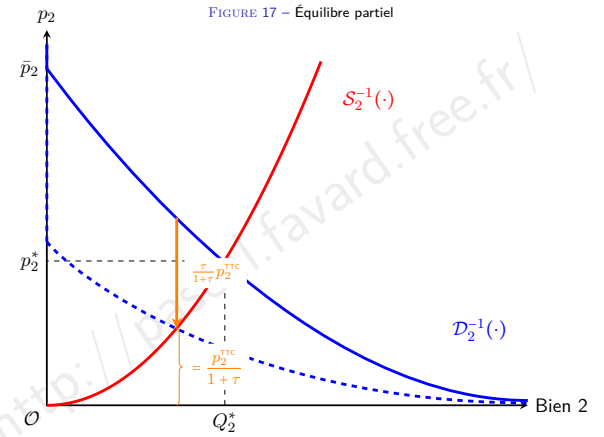


FIGURE 17 – Équilibre partiel

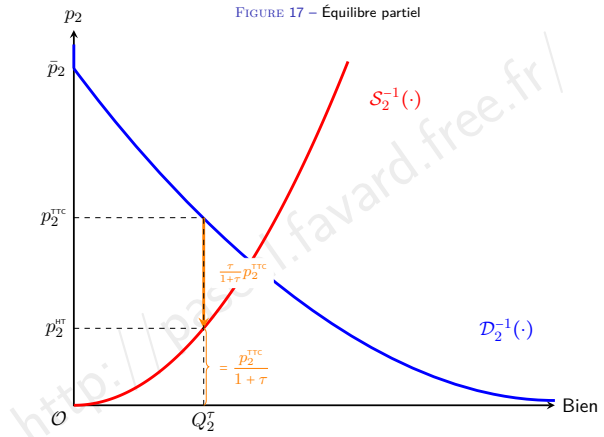


FIGURE 17 – Équilibre partiel

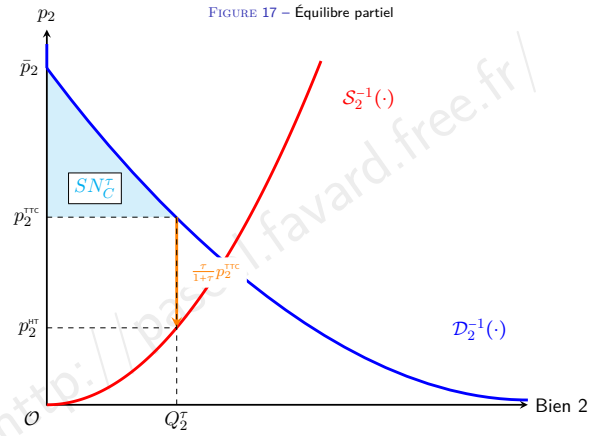


FIGURE 17 – Équilibre partiel

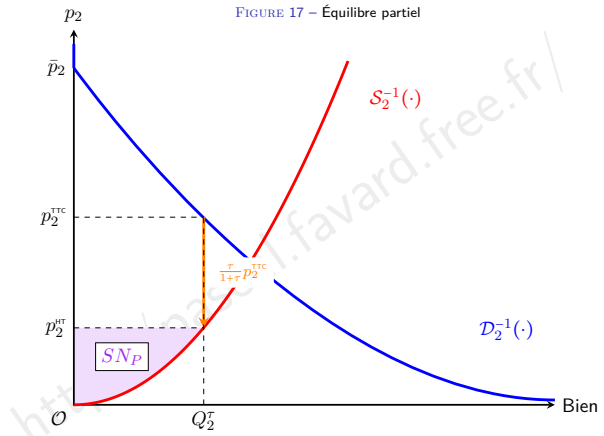


FIGURE 17 – Équilibre partiel

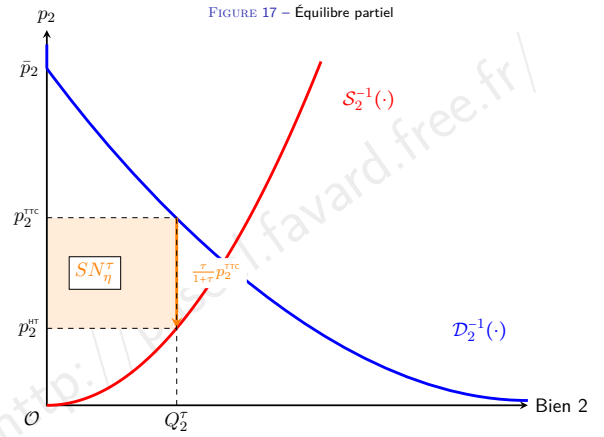


FIGURE 17 – Équilibre partiel

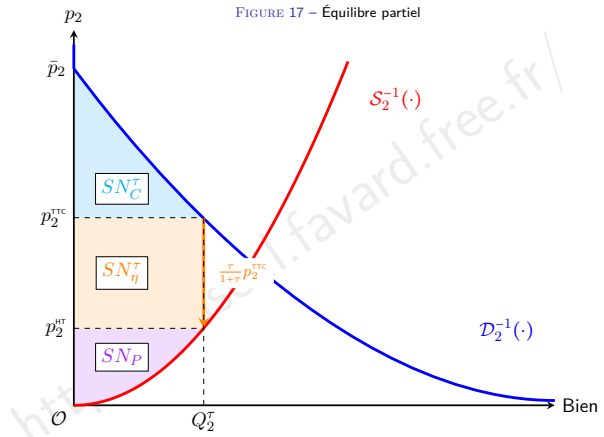


FIGURE 17 – Équilibre partiel

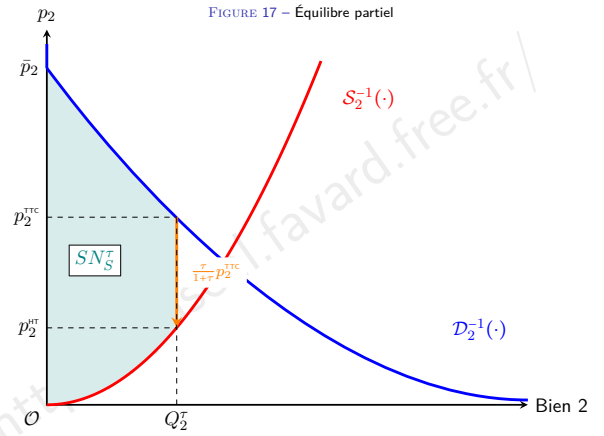
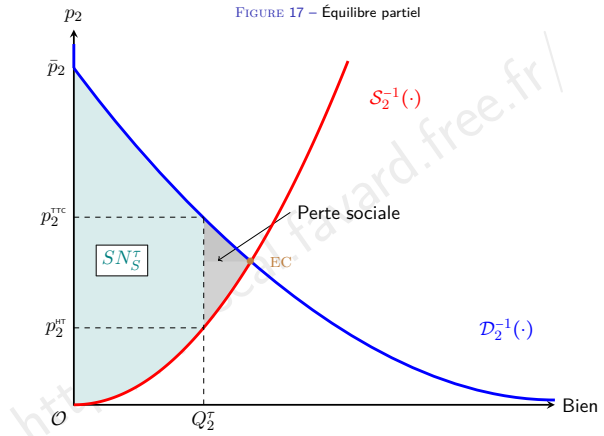


FIGURE 17 – Équilibre partiel



http://pascal.favard.free.fr/

Calcul des surplus nets à l'équilibre

$$SN_C^\tau = \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - p_2^{HT}Q_2^\tau - \left[\left(p^{TTC} - p^{HT}\right)Q_2^\tau\right]$$

$$SN_P^\tau = p_2^{HT}Q_2^\tau - \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]$$

$$SN_\eta^\tau = \left(p^{TTC} - p^{HT}\right)Q_2^\tau$$

Calcul du surplus social net à l'équilibre

$$\Rightarrow \boxed{SN_S^\tau = SN_C^\tau + SN_P^\tau + SN_\eta^\tau = \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - \left[\int_0^{Q_2^\tau} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]}$$

$$\Rightarrow SN_S^* - SN_S^\tau = \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{SN_S^\tau \leq SN_S^*}$$

Perte sociale

$$\Rightarrow \text{Perte Sociale} = \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]$$

$$= \underbrace{\left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - p_2^*\left(Q_2^* - Q_2^\tau\right)} + \underbrace{p_2^*\left(Q_2^* - Q_2^\tau\right) - \left[\int_{Q_2^\tau}^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right]}$$

= Baisse du surplus des consommateurs + Baisse du surplus des producteurs

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
- Taxation des consommateurs
- Taxation des producteurs

4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

Taxation des producteurs

- On cherche $Q_2^\tau \neq 0$ solution de :

$$\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) + \tau\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(1+\tau)\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) = \frac{\mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)}{1+\tau}$$

Même équation que si l'on taxe les consommateurs

Figure 18 – Équilibre partiel

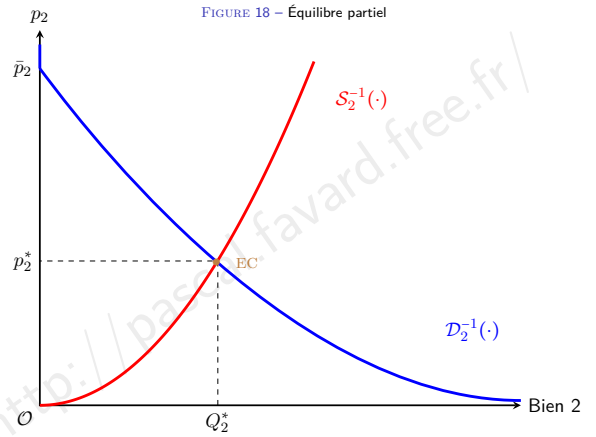


Figure 18 – Équilibre partiel

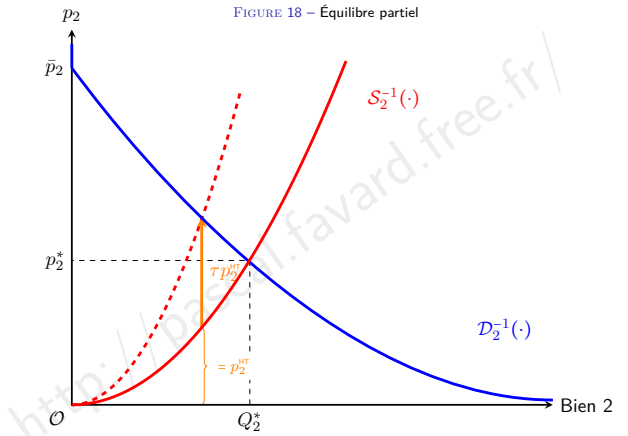
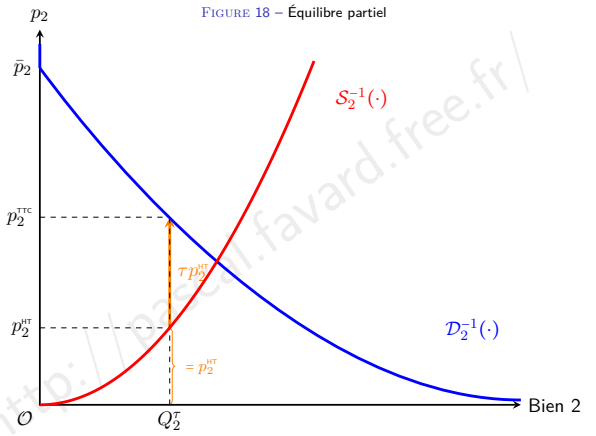


Figure 18 – Équilibre partiel



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 18 – Équilibre partiel

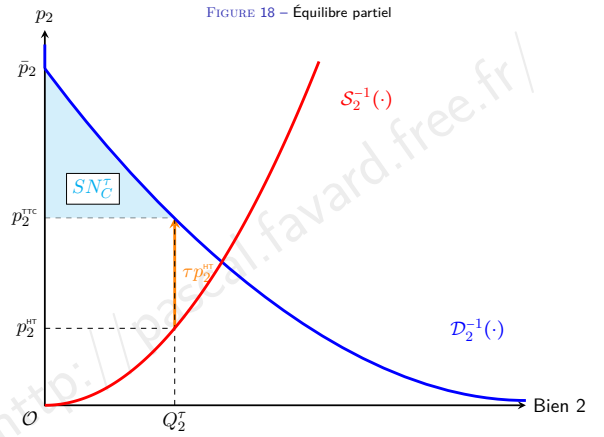


FIGURE 18 – Équilibre partiel

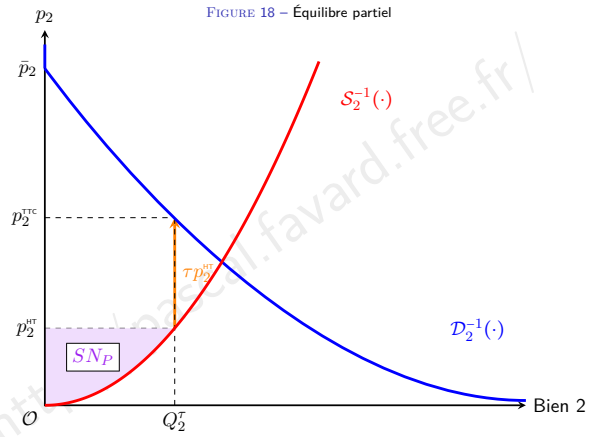


FIGURE 18 – Équilibre partiel

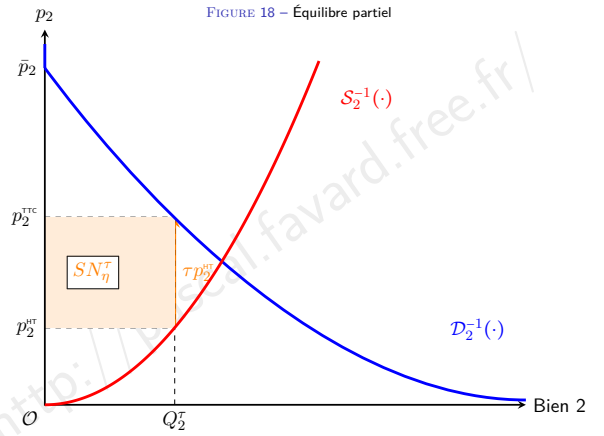


FIGURE 18 – Équilibre partiel

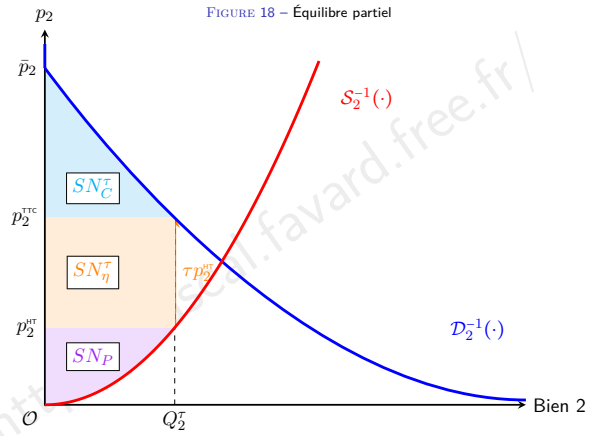


FIGURE 18 – Équilibre partiel

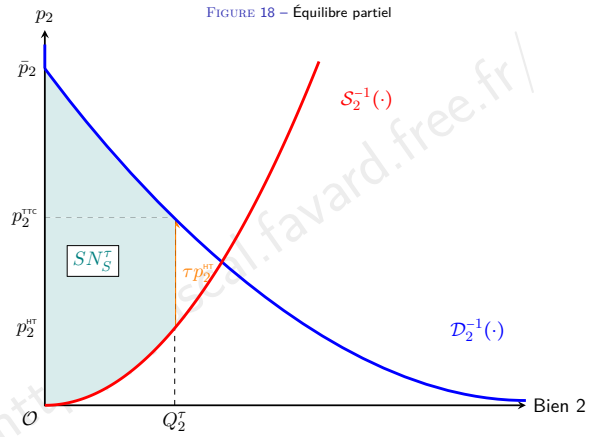
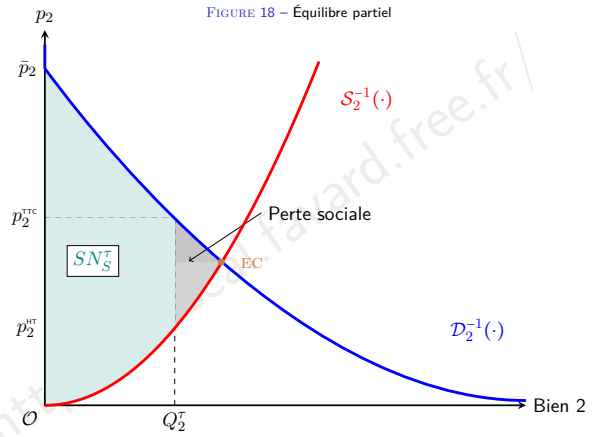


FIGURE 18 – Équilibre partiel



Proposition :

Une taxe ad-valorem, $\tau > 0$, affecte l'équilibre de marché :

$$Q_2^\tau \leq Q_2^* \text{ et } p_2^{HT} \leq p_2^* \leq p_2^{TTC} \text{ avec } p_2^{HT} \neq p_2^{TTC}.$$

Une taxe ad-valorem n'améliore ni les surplus des agents privés ni le surplus social. Qui collecte la taxe n'a pas d'importance.

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

http://pascal.favard.free.fr/

- On cherche $Q_2^\tau \neq 0\,(\tau < SN_C^*(\text{ou } \tau < SN_P^*))$ solution de :

$$\boxed{\mathcal{S}_2^{-1}(Q_2^\tau) = \mathcal{D}_2^{-1}(Q_2^\tau)}$$

$\Rightarrow$

$$Q_2^\tau = Q_2^*$$

Figure 19 – Équilibre partiel

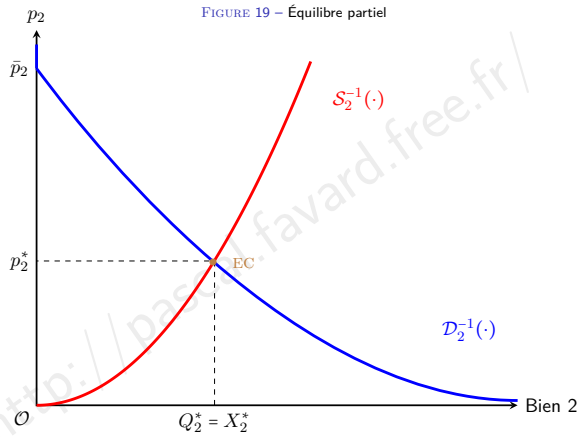


Figure 19 – Équilibre partiel

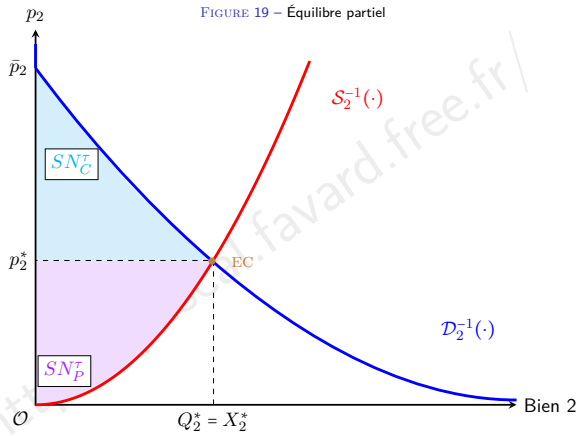


Figure 19 – Équilibre partiel

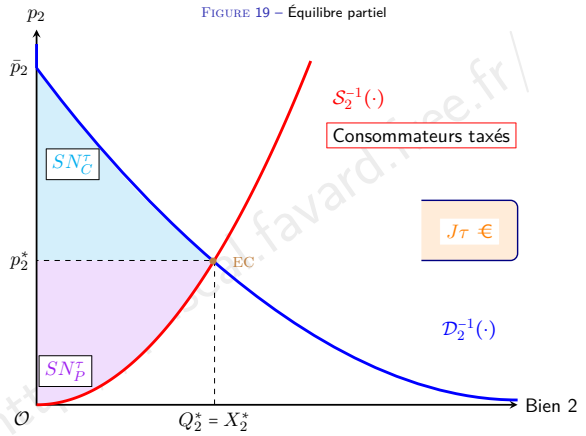


Figure 19 – Équilibre partiel

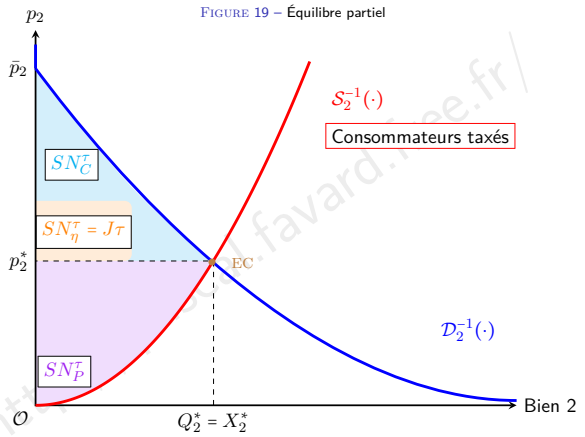


Figure 19 – Équilibre partiel

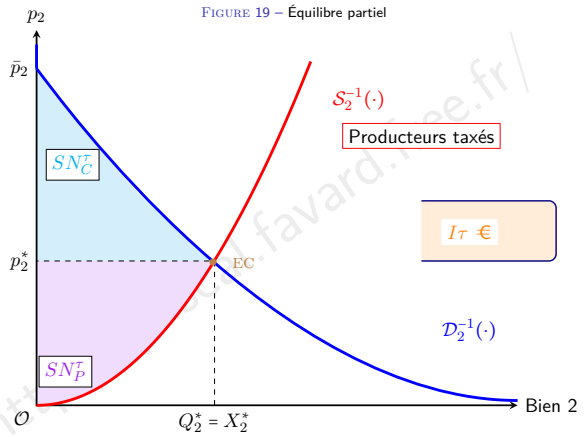


Figure 19 – Équilibre partiel

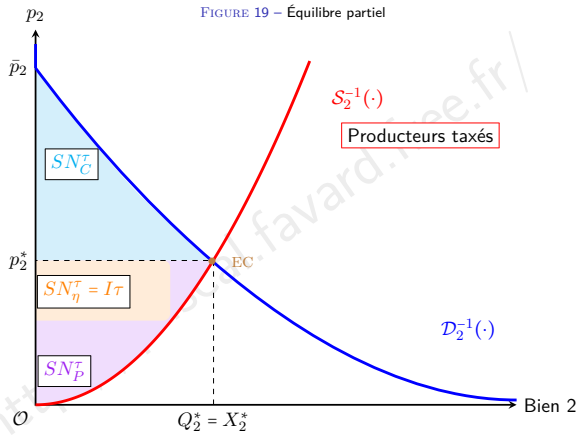
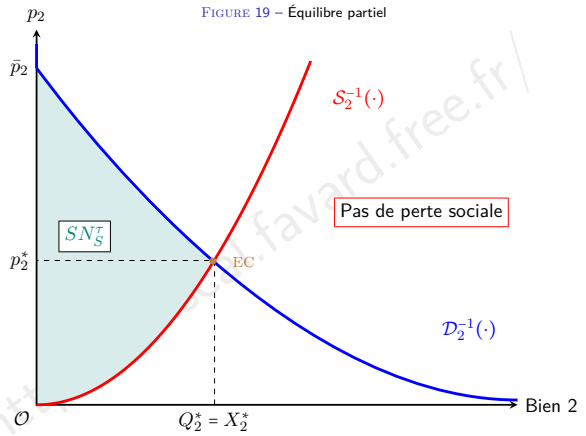


Figure 19 – Équilibre partiel



http://pascal.favard.free.fr/

Calcul des surplus nets à l'équilibre

$$SN_C^\tau = \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - p_2^*Q_2^* - J\tau < SN_C^*$$

$$SN_P^\tau = p_2^*Q_2^* - \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right] = SN_P^*$$

$$SN_\eta^\tau = J\tau$$

Ou $$SN_C^\tau = \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{D}_2^{-1}(Q)dQ\right] - p_2^*Q_2^* = SN_C^*$$

$$SN_P^\tau = p_2^*Q_2^* - \left[\int_0^{Q_2^*} \mathcal{S}_2^{-1}(Q)dQ\right] - I\tau < SN_P^*$$

$$SN_\eta^\tau = I\tau$$

Calcul du surplus social net à l'équilibre

$\Rightarrow$ $\boxed{SN_S^\tau = SN_C^\tau + SN_P^\tau + SN_\eta^\tau = SN_S^*}$

$\Rightarrow$ Perte Sociale = 0

Proposition :

Une taxe forfaitaire n'affecte pas l'équilibre concurrentiel mais modifie le surplus des agents « privés ». La taxe diminue seulement le surplus de ceux qui sont taxés. Le surplus social est le même que sur le marché sans intervention de l'État. Qui collecte la taxe a une importance.

1. Introduction

2. Équilibre partiel à court terme

3. Équilibre partiel à long terme

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel

5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité

Il existe trois types d'interventions :

- Prix plancher (SMIC, prix du livre, CO_2)
- Prix plafond (taux d'usure)
- Quota (laitier, pêche)

5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité
5.1 Prix plancher
5.2 Prix plafond
5.3 Quota

Figure 20 – Impact d'un prix plancher sur l'Équilibre partiel

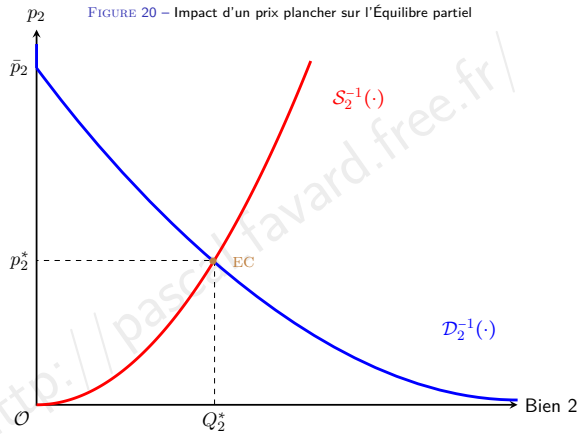
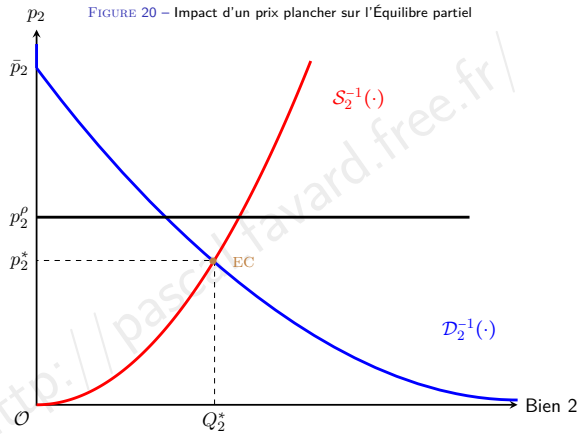
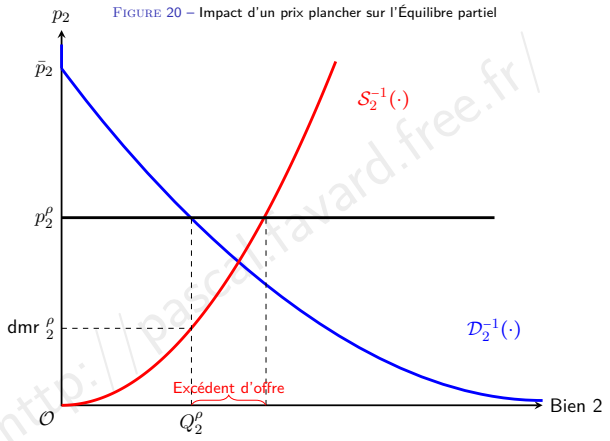


Figure 20 – Impact d'un prix plancher sur l'Équilibre partiel



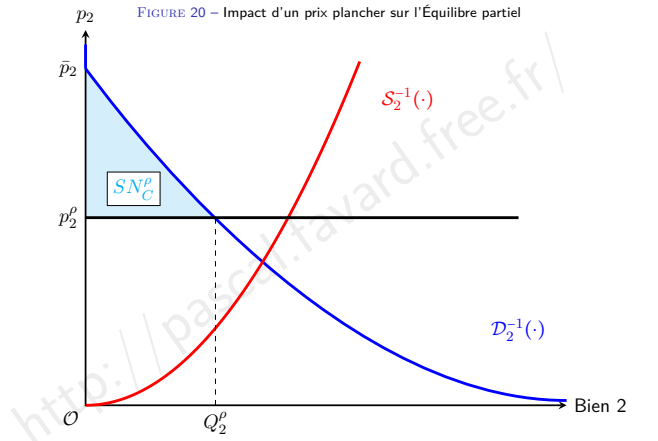
http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 20 – Impact d'un prix plancher sur l'Équilibre partiel



Intervention directement sur le prix ou sur la quantité | Prix plancher

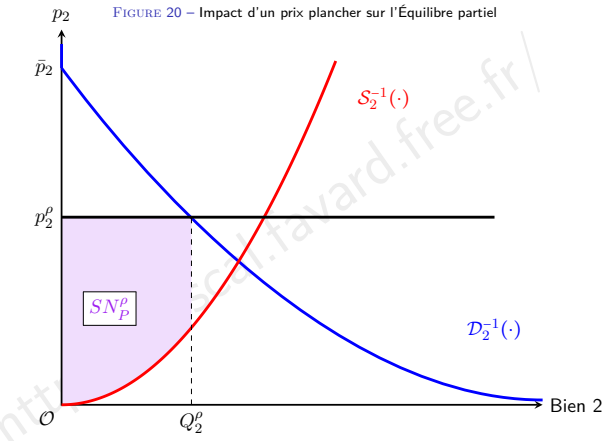
FIGURE 20 – Impact d'un prix plancher sur l'Équilibre partiel



© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 6 : ÉQUILIBRE PARTIEL 11-09-2017 78/82

Intervention directement sur le prix ou sur la quantité | Prix plancher

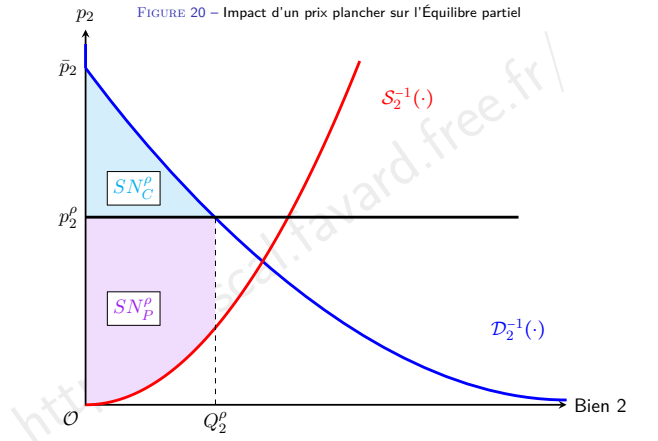
FIGURE 20 – Impact d'un prix plancher sur l'Équilibre partiel



© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 6 : ÉQUILIBRE PARTIEL 11-09-2017 78/82

Intervention directement sur le prix ou sur la quantité | Prix plancher

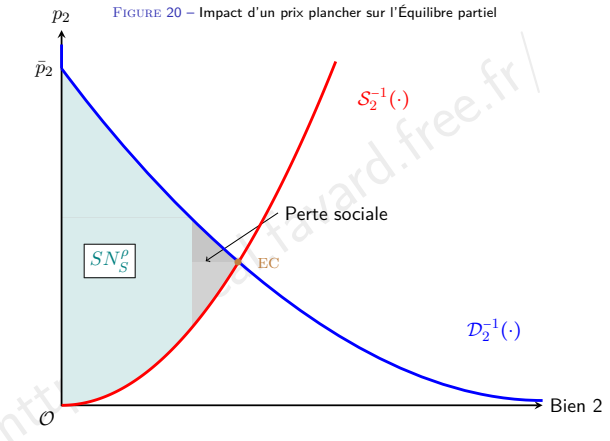
FIGURE 20 – Impact d'un prix plancher sur l'Équilibre partiel



© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 6 : ÉQUILIBRE PARTIEL 11-09-2017 78/82

Intervention directement sur le prix ou sur la quantité | Prix plancher

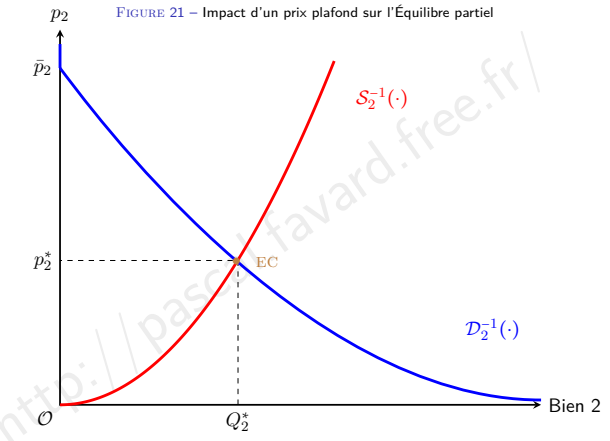
FIGURE 20 – Impact d'un prix plancher sur l'Équilibre partiel



© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 6 : ÉQUILIBRE PARTIEL 11-09-2017 78/82

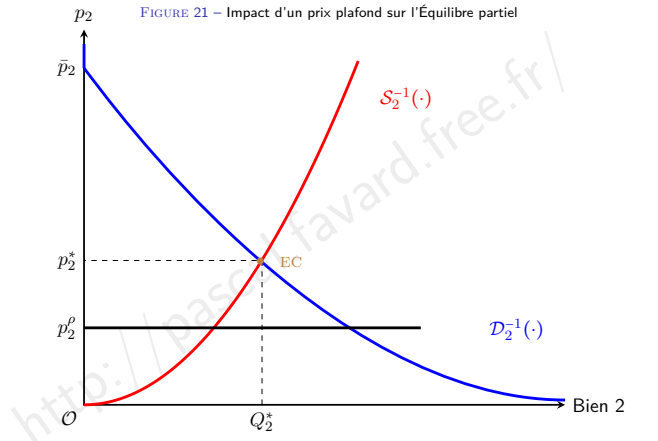
5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité
5.1 Prix plancher
5.2 Prix plafond
5.3 Quota

FIGURE 21 – Impact d'un prix plafond sur l'Équilibre partiel



Intervention directement sur le prix ou sur la quantité | Prix plafond

FIGURE 21 – Impact d'un prix plafond sur l'Équilibre partiel



© Pr. FAVARD (Univ. de Tours) CHAPITRE 6 : ÉQUILIBRE PARTIEL 11-09-2017 80/82

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 21 – Impact d'un prix plafond sur l'Équilibre partiel

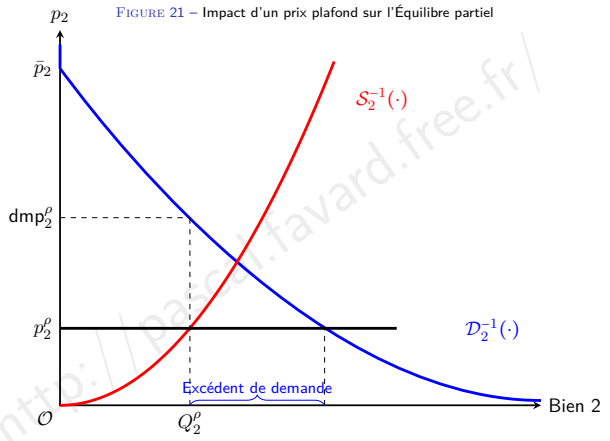


FIGURE 21 – Impact d'un prix plafond sur l'Équilibre partiel

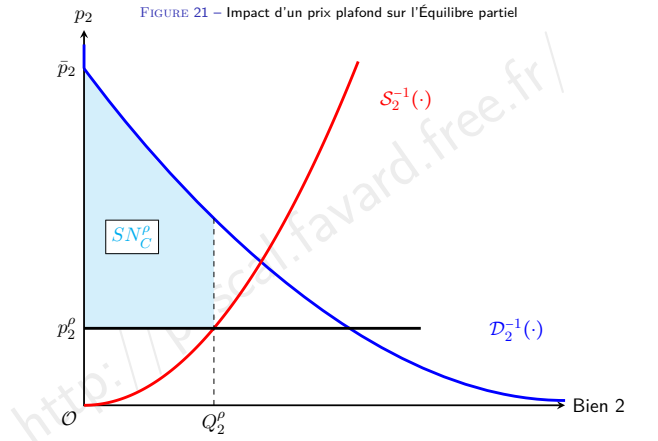


FIGURE 21 – Impact d'un prix plafond sur l'Équilibre partiel

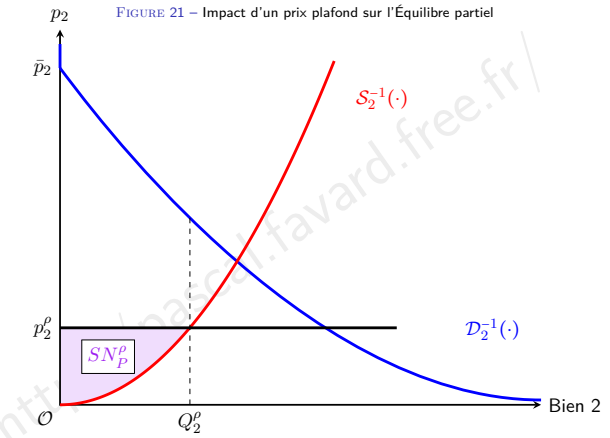


FIGURE 21 – Impact d'un prix plafond sur l'Équilibre partiel

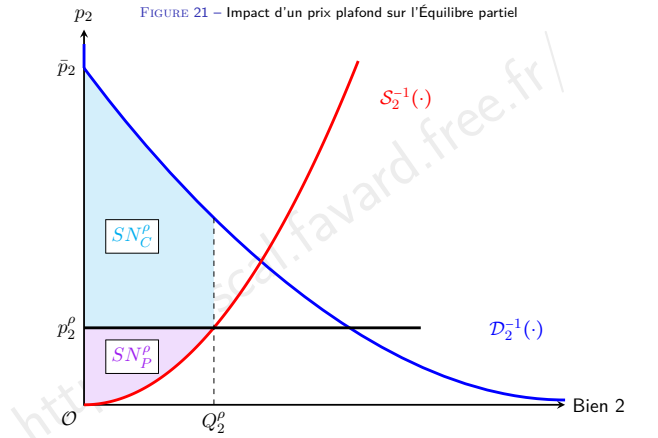
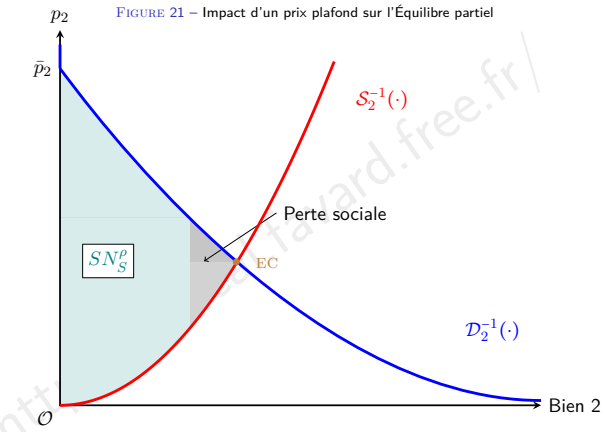


FIGURE 21 – Impact d'un prix plafond sur l'Équilibre partiel



5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité
5.1 Prix plancher
5.2 Prix plafond
5.3 Quota

FIGURE 22 – Impact d'un quota sur l'Équilibre partiel

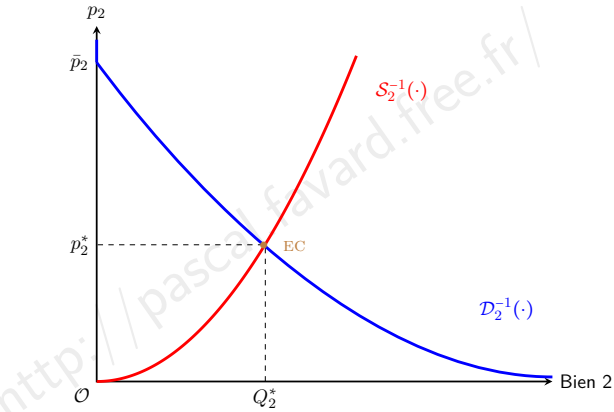
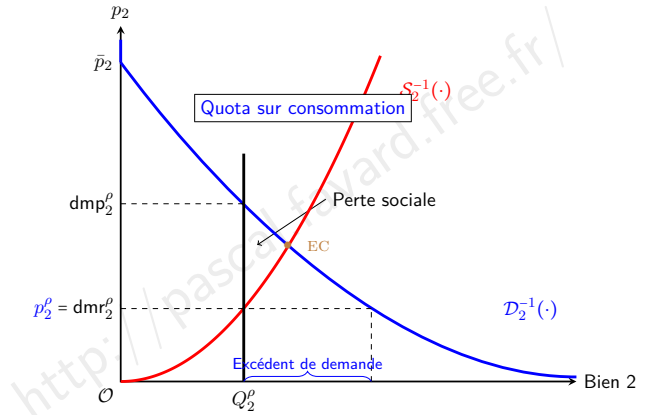
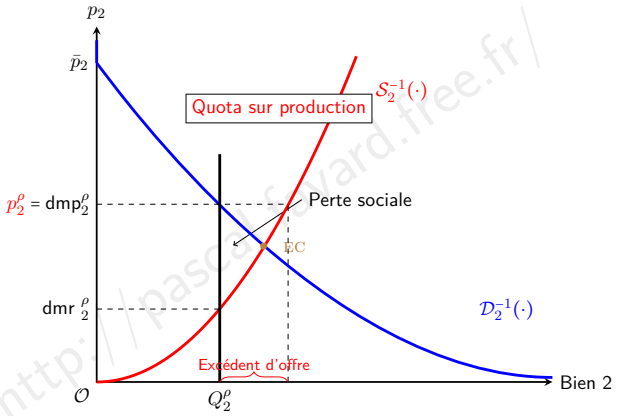


FIGURE 22 – Impact d'un quota sur l'Équilibre partiel



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 22 – Impact d'un quota sur l'Équilibre partiel



http://pascal.favard.free.fr/

Table des matières (Diapo : 1)

1. Introduction

2. Équilibre partiel à court terme
2.1 La demande agrégée
2.2 L'offre agrégée
2.3 Détermination de l'équilibre sur le marché
2.4 Existence et unicité de l'équilibre
2.5 Stabilité de l'équilibre
2.6 Surplus social à l'équilibre

3. Équilibre partiel à long terme
3.1 L'offre agrégée de long terme avec entreprises identiques
3.2 L'offre agrégée de long terme avec entreprises différentes

4. Taxe (Subvention) et équilibre partiel
4.1 Taxe à l'unité et équilibre
- Taxation des consommateurs
- Cas polaires

Table des matières (Diapo : 2)

- Taxation des producteurs
4.2 Taxe ad-valorem et équilibre
- Taxation des consommateurs
- Taxation des producteurs
4.3 Taxe forfaitaire et équilibre

5. Intervention directement sur le prix ou sur la quantité
5.1 Prix plancher
5.2 Prix plafond
5.3 Quota

Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

Université François-Rabelais Tours

Les chapitres : L2 & L3

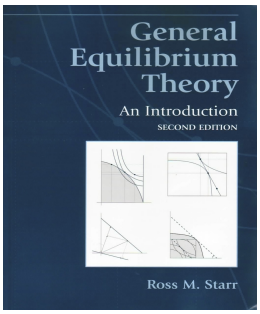
1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole
9. Équilibre de Nash

Chapitre 7 :

« Équilibre général »

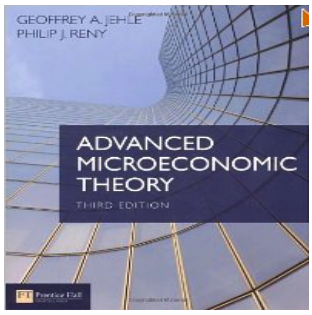
Vive la lecture !

1. « General Equilibrium Theory An Introduction » by Ross M. Starr, Cambridge Eds
2. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
3. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
4. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



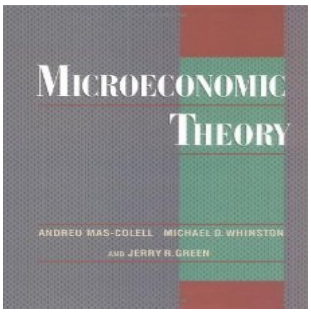
Vive la lecture !

1. « General Equilibrium Theory An Introduction » by Ross M. Starr, Cambridge Eds
2. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
3. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
4. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « General Equilibrium Theory An Introduction » by Ross M. Starr, Cambridge Eds
2. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
3. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
4. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université



Vive la lecture !

1. « General Equilibrium Theory An Introduction » by Ross M. Starr, Cambridge Eds
2. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
3. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
4. « Analyse Micréconomique » par H.R. Varian, DeBoeck Université

Plan

1. Introduction
2. Définitions
3. Un consommateur : Robinson Crusoé
4. Deux consommateurs
5. Deux consommateurs et deux producteurs

1. Introduction

2. Définitions

3. Un consommateur : Robinson Crusoé

4. Deux consommateurs

5. Deux consommateurs et deux producteurs

http://pascal.favard.free.fr/

Marchés concurrentiels

- Atomicité.
- Biens privés.
- Information parfaite et gratuite pour tous les agents.
- Rendements décroissants.
- Pas d'externalité

Équilibre partiel Vs Équilibre général

- $\mathcal{S}_\ell(p_\ell^*) = \mathcal{D}_\ell(p_\ell^*)$ avec $p_\ell^* \geq 0$
- Processus dynamique $\Rightarrow$ équilibre sationnaire
- Ceteris Paribus
  - Une baisse du prix du porc a un impact sur le marché du bœuf
  - Un augmentation du prix du fioul a un impact sur le prix du gaz
- S'il y a L biens dans l'économie il faut résoudre le système à L équations suivant :

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{p^*}) = \vec{\mathcal{D}}(\vec{p^*}) \text{ avec } \vec{p^*} \geq 0$$

Les questions sur l'équilibre général

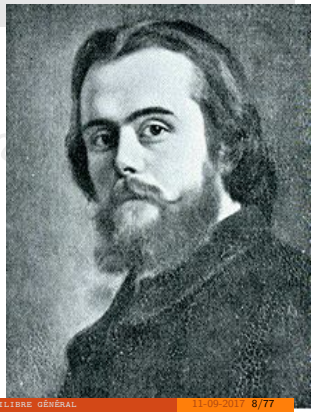
- Existence
- Unicité
- Stabilité
- Efficience

1954, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica.

1. Antoine-Augustin Cournot (1801-1872) mathématicien français.
2. Léon Walras (1834-1910) économiste français.
3. Gérard Debreu (1921-2004) économiste franco-américain, prix Nobel 1983.
4. Kenneth Arrow (1921-2017) économiste américain, prix Nobel 1972.

1954, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica.

1. Antoine-Augustin Cournot (1801-1872) mathématicien français.
2. Léon Walras (1834-1910) économiste français.
3. Gérard Debreu (1921-2004) économiste franco-américain, prix Nobel 1983.
4. Kenneth Arrow (1921-2017) économiste américain, prix Nobel 1972.



1954, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica.

1. Antoine-Augustin Cournot (1801-1872) mathématicien français.
2. Léon Walras (1834-1910) économiste français.
3. Gérard Debreu (1921-2004) économiste franco-américain, prix Nobel 1983.
4. Kenneth Arrow (1921-2017) économiste américain, prix Nobel 1972.

1954, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica.

1. Antoine-Augustin Cournot (1801-1872) mathématicien français.
2. Léon Walras (1834-1910) économiste français.
3. Gérard Debreu (1921-2004) économiste franco-américain, prix Nobel 1983.
4. Kenneth Arrow (1921-2017) économiste américain, prix Nobel 1972.

1. Introduction

2. Définitions

3. Un consommateur : Robinson Crusoé

4. Deux consommateurs

5. Deux consommateurs et deux producteurs

http://pascal.favard.free.fr/

2. Définitions
2.1 Allocation économique
2.2 Optimalité paretienne
2.3 Équilibre concurrentiel
2.4 Théorèmes fondamentaux de l'économie du bien-être

http://pascal.favard.free.fr/

- J consommateurs ($j = 1, .., J$)
- I producteurs ($i = 1, .., I$)
- L biens ($\ell = 1, .., L$)
- $\vec{x}_j \in X_j$, le vecteur de consommation de j
- $\vec{y}_i \in Y_i$, le vecteur de production de i
- $\vec{w}_j$ le vecteur de ressources initiales de j

Allocation faisable

Définition :

1. *Une allocation économique* $(\vec{x}_1, .., \vec{x}_J, \vec{y}_1, .., \vec{y}_I)$, *est une spécification d'un vecteur de consommation appartenant à l'ensemble de consommation et d'un vecteur de production appartenant à l'ensemble de production.*
2. *L'allocation du bien* ℓ *est faisable si :*

$$\sum_{j=1}^{J} x_{\ell j} \leq w_\ell + \sum_{i=1}^{I} y_{\ell i}.$$

2. Définitions
2.1 Allocation économique
2.2 Optimalité paretienne
2.3 Équilibre concurrentiel
2.4 Théorèmes fondamentaux de l'économie du bien-être

Optimalité au sens de Pareto

Définition :

Une allocation économique faisable $(\vec{x}_1, .., \vec{x}_J, \vec{y}_1, .., \vec{y}_I)$, *est Pareto optimale ou Pareto efficiente s'il n'existe aucune autre allocation faisable* $(\vec{x}'_1, .., \vec{x}'_J, \vec{y}'_1, .., \vec{y}'_I)$ *telle que* $u_j(\vec{x}'_j) \geq u_j(\vec{x}_j)$ *pour tout* $j = 1, .., J$ *et* $u_j(\vec{x}'_j) > u_j(\vec{x}_j)$ *pour au moins un* j.

Optimalité au sens de Pareto

Définition :

Une allocation économique faisable $(\vec{x}_1, .., \vec{x}_J, \vec{y}_1, .., \vec{y}_I)$, *est Pareto optimale ou Pareto efficiente s'il n'existe aucune autre allocation faisable* $(\vec{x}'_1, .., \vec{x}'_J, \vec{y}'_1, .., \vec{y}'_I)$ *telle que* $u_j(\vec{x}'_j) \geq u_j(\vec{x}_j)$ *pour tout* $j = 1, .., J$ *et* $u_j(\vec{x}'_j) > u_j(\vec{x}_j)$ *pour au moins un* j.

On ne peut pas augmenter l'utilité d'un agent sans diminuer celle d'au moins un autre.

Optimalité au sens de Pareto

Définition :

Une allocation économique faisable $(\vec{x}_1, .., \vec{x}_J, \vec{y}_1, .., \vec{y}_I)$, *est Pareto optimale ou Pareto efficiente s'il n'existe aucune autre allocation faisable* $(\vec{x}'_1, .., \vec{x}'_J, \vec{y}'_1, .., \vec{y}'_I)$ *telle que* $u_j(\vec{x}'_j) \geq u_j(\vec{x}_j)$ *pour tout* $j = 1, .., J$ *et* $u_j(\vec{x}'_j) > u_j(\vec{x}_j)$ *pour au moins un* j.

On ne peut pas augmenter l'utilité d'un agent sans diminuer celle d'au moins un autre.
Concept minimal qui n'a rien à voir avec l'équité.

FIGURE 1 – Ensemble des possibilités d'utilités

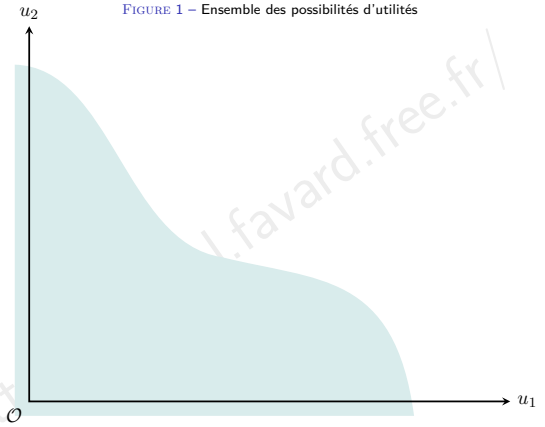


FIGURE 1 – Ensemble des possibilités d'utilités

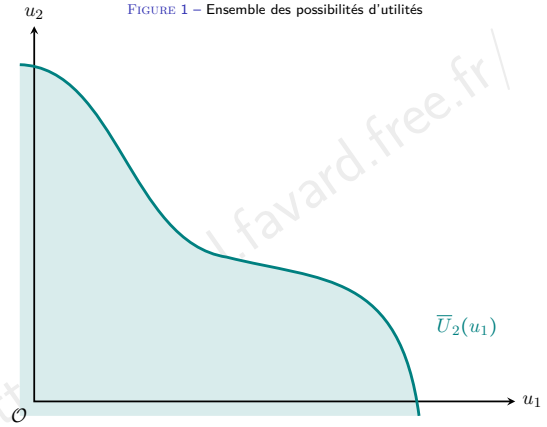
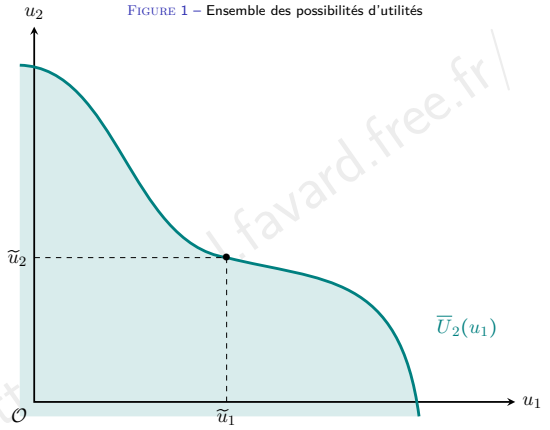


FIGURE 1 – Ensemble des possibilités d'utilités



2. Définitions
2.1 Allocation économique
2.2 Optimalité paretienne
2.3 Équilibre concurrentiel
2.4 Théorèmes fondamentaux de l'économie du bien-être

Équilibre concurrentiel

Définition :

Une allocation économique $(\vec{x}_1^*, .., \vec{x}_J^*, \vec{y}_1^*, .., \vec{y}_I^*)$ *et un vecteur de prix* $\vec{p}^* \in \mathbb{R}^L$, *est un équilibre concurrentiel ou équilibre walrassien si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- *maximisation du profit pour chaque entreprise* $i = 1, .., I$: $\vec{y}_i^*$ *est solution de :* $\underset{y_i \in Y_i}{Max}\ \vec{p}^* \vec{y}_i$,
- *maximisation de l'utilité pour chaque consommateur* $j = 1, .., J$; $\vec{x}_j^*$ *est solution de :* $\underset{\vec{x}_j \in X_j}{Max}\ u_j(\vec{x}_j)\ slc\ \vec{p}^* \vec{x}_j \leq \vec{p}^* \vec{w}_j + \sum_{i=1}^{I} \theta_{ij} \vec{p}^* \vec{y}_i$,
- *market clearing pour chaque bien* $\ell = 1, .., L$: $\sum_{j=1}^{J} x_{\ell j}^* = w_\ell + \sum_{i=1}^{I} y_{\ell i}^*$.

2. Définitions
2.1 Allocation économique
2.2 Optimalité paretienne
2.3 Équilibre concurrentiel
2.4 Théorèmes fondamentaux de l'économie du bien-être

Premier théorème

Théorème :

Si une allocation économique $(\vec{x}_1^*, .., \vec{x}_J^*, \vec{y}_1^*, .., \vec{y}_I^*)$ *et un vecteur de prix* $\vec{p}^* \in \mathbb{R}^L$, *sont un équilibre concurrentiel alors cette allocation est Pareto optimale.*

Second théorème

Théorème :

Pour n'importe quel vecteur d'utilité individuelle optimal au sens de Pareto $\vec{u}^*$ *il existe un vecteur de transfert en terme de numéraire (bien* m*)* $\vec{T} \in \mathbb{R}^J$, *vérifiant* $\sum_j T_j = 0$ *tel que l'équilibre concurrentiel atteint avec les ressources en bien* m $(w_{m1} + T_1, .., w_{mJ} + T_J)$ *donne l'optimum de Pareto conduisant à* $\vec{u}^*$.

http://pascal.favard.free.fr/

1. Introduction

2. Définitions

3. Un consommateur : Robinson Crusoé

4. Deux consommateurs

5. Deux consommateurs et deux producteurs

Modèle

- Économie autarcique avec un seul agent et deux biens c et ℓ.
- Un seul maximande, la fonction d'utilité : $u(c, \ell)$.

$\Rightarrow$ Pas de problème de distribution entre agents.

- Robinson dispose de 24 heures par jour : $\ell = 24 - t$
- La seule activité productive est la pêche : $q = f(t)$

Hypothèses

- f et u de classe $\mathcal{C}^2$.
- $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} > 0, \dfrac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} < 0.$
- $\dfrac{\partial u(c,\ell)}{\partial c} > 0, \dfrac{\partial u(c,\ell)}{\partial \ell} > 0,$
- $\dfrac{\partial^2 u(c,\ell)}{\partial c^2} < 0, \dfrac{\partial^2 u(c,\ell)}{\partial \ell^2} < 0, \dfrac{\partial^2 u(c,\ell)}{\partial c \partial \ell} > 0.$

$\Rightarrow$ f concave et u quasi-concave.

- $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = +\infty$

3. Un consommateur : Robinson Crusoé
3.1 Optimum de Pareto
3.2 Équilibre concurrentiel
3.3 Existence d'un équilibre
3.4 Premier théorème de l'économie du bien-être

Figure 2 – Optimum de Pareto

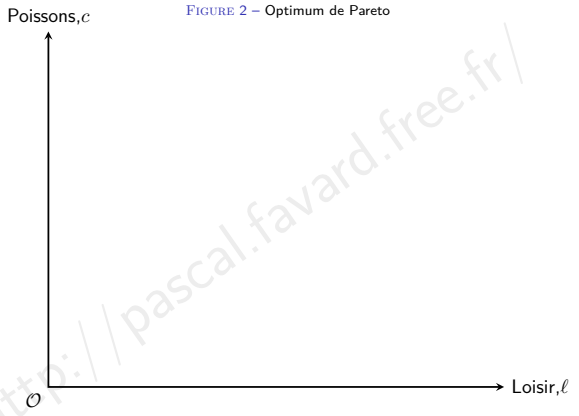


Figure 2 – Optimum de Pareto

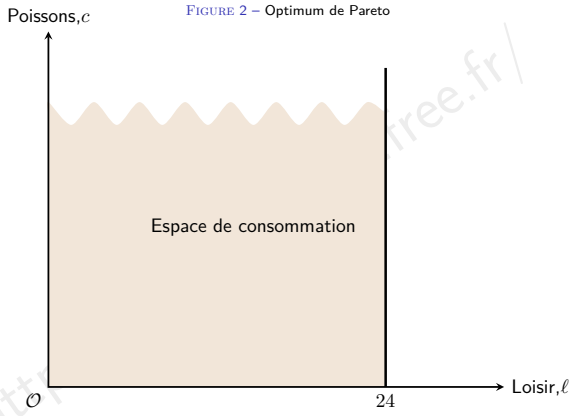


Figure 2 – Optimum de Pareto

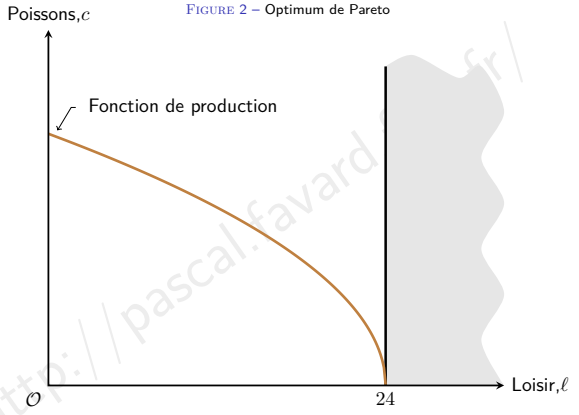
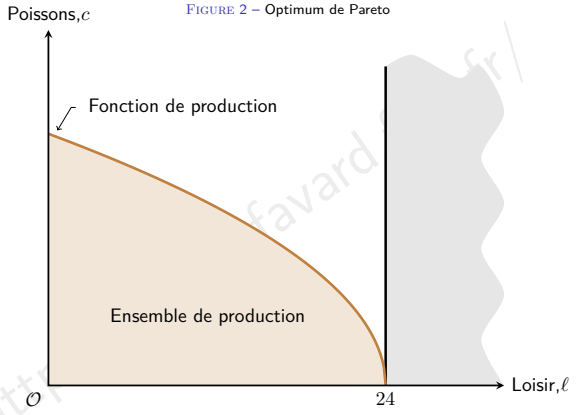


Figure 2 – Optimum de Pareto



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 2 – Optimum de Pareto

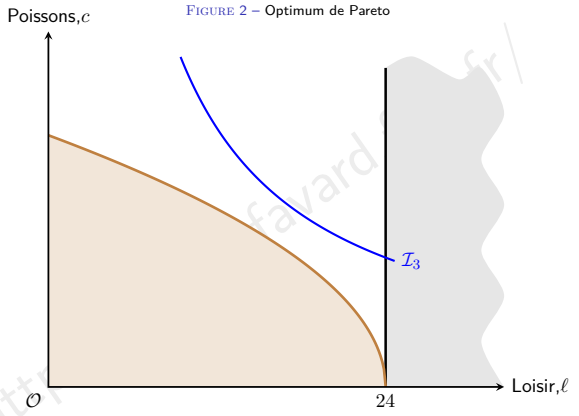


FIGURE 2 – Optimum de Pareto

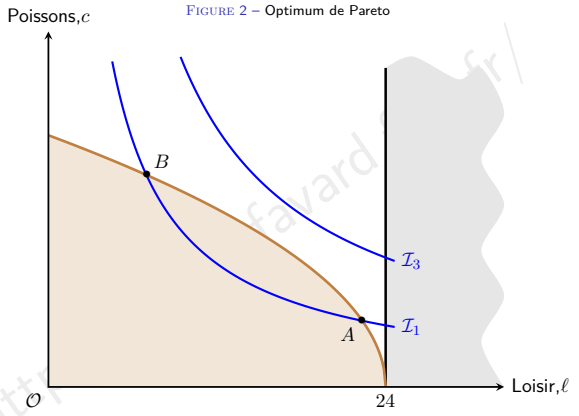


FIGURE 2 – Optimum de Pareto

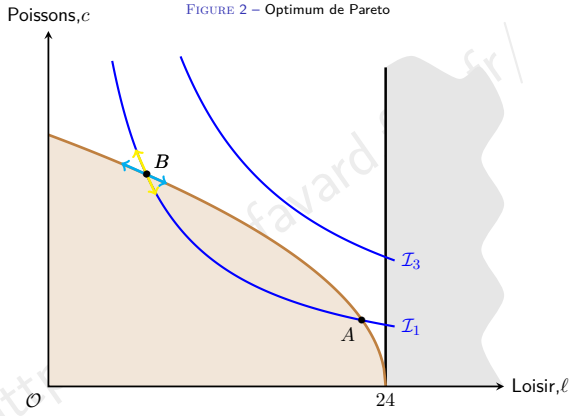
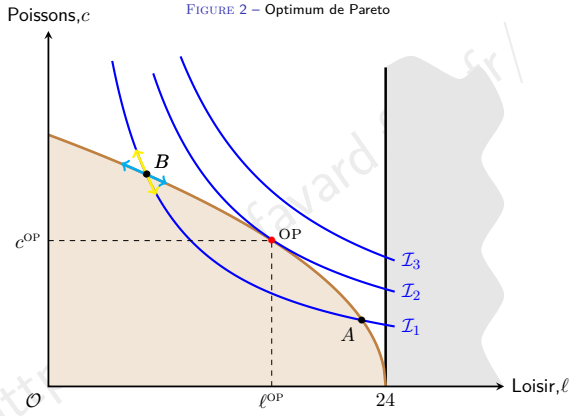


FIGURE 2 – Optimum de Pareto



- Le programme de Robinson :

$$\mathscr{P}_{Robinson} \left| \begin{array}{l} \underset{\{c,\ell,q,t\}}{\text{Max}} \; u(c,\ell) \\ slc \; \ell = 24 - t \; ; \; q = f(t) \; ; \; c = q \end{array} \right. \qquad (1)$$

- Le programme de Robinson est donc :

$$\mathscr{P}_{Robinson} \left| \underset{\{\ell\}}{\text{Max}} \; u(f(24-\ell),\ell) \right. \qquad (2)$$

$\boxed{\text{CN1}}$ $\dfrac{\mathrm{d}u(f(24-\ell^*),\ell^*)}{\mathrm{d}\ell} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u(f(24-\ell^*),\ell^*)}{\partial c}\frac{\mathrm{d}f(24-\ell^*)}{\mathrm{d}\ell} + \frac{\partial u(f(24-\ell^*),\ell^*)}{\partial \ell} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}f(24-\ell^*)}{\mathrm{d}\ell} = -\frac{Um_\ell(f(24-\ell^*),\ell^*)}{Um_c(f(24-\ell^*),\ell^*)}$$

or $\dfrac{\mathrm{d}f(24-\ell)}{\mathrm{d}\ell} = \dfrac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\ell} = TmT_{\ell,c}$

et $-\dfrac{Um_\ell(f(24-\ell),\ell)}{Um_c(f(24-\ell),\ell)} = TmS_{\ell,c}$

$\Rightarrow$ $\boxed{TmT_{\ell,c}|_* = TmS_{\ell,c}|_*}$

$\boxed{\text{CS2}}$ $\dfrac{\mathrm{d}^2u(f(24-\ell),\ell)}{\mathrm{d}\ell^2} < 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{\partial^2 u(\cdot)}{\partial c^2}\frac{\mathrm{d}f(\cdot)}{\mathrm{d}\ell} + \frac{\partial^2 u(\cdot)}{\partial c \partial \ell}\right]\frac{\mathrm{d}f(\cdot)}{\mathrm{d}\ell} + \frac{\partial u(\cdot)}{\partial c}\frac{\mathrm{d}^2 f(\cdot)}{\mathrm{d}\ell^2} + \frac{\partial^2 u(\cdot)}{\partial \ell \partial c}\frac{\mathrm{d}f(\cdot)}{\mathrm{d}\ell} + \frac{\partial^2 u(\cdot)}{\partial \ell^2} < 0$$

$\Rightarrow$ CS2 vérifiée.

3. Un consommateur : Robinson Crusoé
3.1 Optimum de Pareto
3.2 Équilibre concurrentiel
3.3 Existence d'un équilibre
3.4 Premier théorème de l'économie du bien-être

http://pascal.favard.free.fr/

Allocation décentralisée

- Il y a 2 marchés : travail et poissons.
- Soit w le salaire horaire et p le prix unitaire des poissons.

$\Rightarrow$ $\pi(\cdot) = pq - wt = pf(t) - wt \Leftrightarrow \pi = pq + w\ell - 24w$

$\Rightarrow$ Droite d'isoprofit : $pq + w\ell = \pi + 24w$

- La contrainte budgétaire de Robinson : $pc = wt + \pi \Leftrightarrow pc + w\ell = \pi + 24w$.

Figure 3 – Équilibre concurrentiel

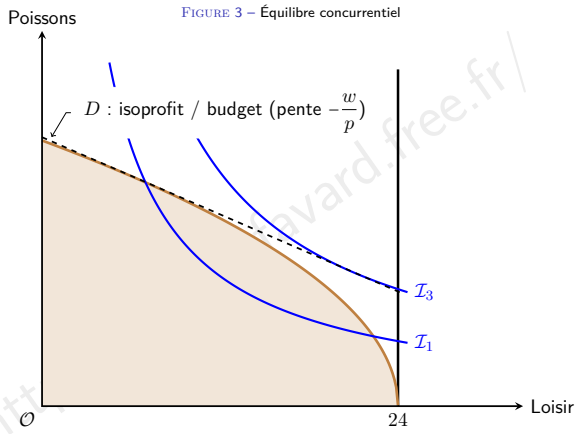


Figure 3 – Équilibre concurrentiel

Figure 3 – Équilibre concurrentiel

Figure 3 – Équilibre concurrentiel

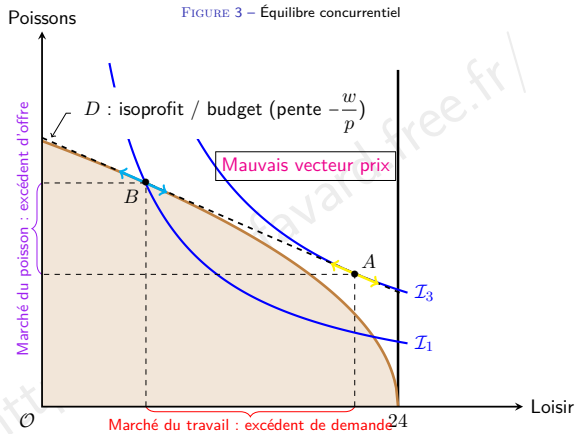


Figure 3 – Équilibre concurrentiel

- Le programme de Robinson :

$$\mathscr{P}_{Robinson} \left| \begin{array}{l} \underset{\{c,\ell\}}{\text{Max}}\ u(c,\ell) \\ slc\ pc = \pi + w(24-\ell) = \mathcal{R} \end{array} \right. \tag{3}$$

$\Rightarrow$ Le programme de Robinson est donc :

$$\mathscr{P}_{Robinson} \left| \underset{\{c\}}{\text{Max}}\ u(c, \frac{\pi - pc}{w} + 24) \right. \tag{4}$$

Consommateur

$\boxed{\text{CN1}}$ $\dfrac{\mathrm{d}u(c^*)}{\mathrm{d}c} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u(c^*)}{\partial c} - \frac{p}{w}\frac{\partial u(c^*)}{\partial \ell} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{w}{p} = \frac{Um_\ell(c^*)}{Um_c(c^*)} = -\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\ell}\Big|_* = -TmS_{\ell,c}\Big|_*$$

http://pascal.favard.free.fr/

- Le programme de l'entreprise :

$$\mathscr{P}_\epsilon \left| \begin{array}{l} \underset{\{q,t\}}{\text{Max}} \ \pi(t,w) = pq - wt \\ slc \ q = f(t) \end{array} \right. \quad (5)$$

⇒ Le programme de l'entreprise est donc :

$$\mathscr{P}_\epsilon \left| \ \underset{\{t\}}{\text{Max}} \ \pi(t) = pf(t) - wt \right. \quad (6)$$

Producteur

CN1 $\dfrac{\mathrm{d}\pi(t^*)}{\mathrm{d}t} = 0$

$$\Leftrightarrow \ p\frac{\mathrm{d}f(t^*)}{\mathrm{d}t} - w = 0$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{w}{p} = \frac{\mathrm{d}f(t^*)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\Big|_* = -\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\ell}\Big|_* = -TmT_{\ell,c}|_*$$

Marché

⇒ $\boxed{TmT_{\ell,c}|_* = TmS_{\ell,c}|_*}$

C'est donc une condition nécessaire à l'équilibre.

- Pour qu'elle soit suffisante on doit aussi avoir :

$$\begin{cases} pc = \mathcal{R} = \pi + w(24 - \ell) \\ \pi = pq - wt \end{cases}$$

⇔ Loi de Walras : $p(c - q) + w(t - (24 - \ell)) = 0$

! Cette loi n'est pas une condition suffisante pour l'équilibre

3. Un consommateur : Robinson Crusoé
3.1 Optimum de Pareto
3.2 Équilibre concurrentiel
3.3 Existence d'un équilibre
3.4 Premier théorème de l'économie du bien-être

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :
Soit $[a,b]$ un fermé dans $\mathbb{R}$ et g une fonction continue sur ce fermé telle que $g(a) < g(b)$. $\forall c \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) < c < g(b)$. $\exists x \in]a,b[$ tel que $g(x) = c$

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :
Soit $[a,b]$ un fermé dans $\mathbb{R}$ et g une fonction continue sur ce fermé telle que $g(a) < g(b)$. $\forall c \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) < c < g(b)$. $\exists x \in]a,b[$ tel que $g(x) = c$

Pour l'appliquer faisons quelques hypothèses.
Notons $t^s\left(\frac{w}{p}, \mathcal{R}\right)$ et $t^d\left(\frac{w}{p}\right)$, l'offre et la demande sur le marché du travail.
Notons $q\left(\frac{w}{p}\right)$ et $c\left(\frac{w}{p}, \mathcal{R}\right)$, l'offre et la demande sur le marché du poisson.

Hypothèses

- Si $\frac{w}{p} = 0$ alors $t^s(\cdot) = 0$, en échange volontaire. En revanche, on a $f'(\cdot) > 0$ donc $t^d(\cdot) \ggg 0$.
- Pour $\frac{w}{p} > \overline{\frac{w}{p}}$ on a $t^d(\cdot) \to 0$ mais $t^s(\cdot) \ggg 0$.
- Les fonctions d'offres et de demandes sont continues par rapport à $\frac{w}{p}$ et $\mathcal{R}$.

- Notons $z_t(\cdot)$ la demande excédentaire, continue, de travail :

⇒ $z_t(\cdot) = t^d(\cdot) - t^s(\cdot)$.

Or $z_t(0) = t^d(0) - t^s(0) > 0$ et $z_t(\overline{\frac{w}{p}}) = t^d(\overline{\frac{w}{p}}) - t^s(\overline{\frac{w}{p}}) < 0$, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists \widetilde{\frac{w}{p}} \in \left]0, \overline{\frac{w}{p}}\right[\text{ tel que } z_t(\widetilde{\frac{w}{p}}) = 0.$$

- La loi de Walras implique l'équilibre sur le marché du poisson. Donc $\widetilde{\frac{w}{p}}$ est le salaire réel à l'équilibre « général ». Sous nos hypothèses l'équilibre général, dans une économie « Robinson Crusoé », existe.

http://pascal.favard.free.fr/

3. Un consommateur : Robinson Crusoé
3.1 Optimum de Pareto
3.2 Équilibre concurrentiel
3.3 Existence d'un équilibre
3.4 Premier théorème de l'économie du bien-être

Équilibre concurrentiel est-il un optimum de Pareto ?

- La condition à l'optimum de Pareto :

$\Rightarrow$ $\boxed{TmT_{\ell,c}|_* = TmS_{\ell,c}|_*}$

- La condition à l'équilibre concurrentiel :

$\Rightarrow$ $\boxed{TmT_{\ell,c}|_* = TmS_{\ell,c}|_*}$

- Même condition $\Rightarrow$ l'équilibre est un optimum.

1. Introduction
2. Définitions
3. Un consommateur : Robinson Crusoé
4. Deux consommateurs
5. Deux consommateurs et deux producteurs

Modèle

- 2 consommateurs : Anatole a et Bérénice b. Pas de production.

$\Rightarrow$ On rajoute donc le marchandage bilatéral à partir de W.

- Soit $u_j(x_{1j}, x_{2j})$ l'utilité du consommateur j et $\vec{w}_j$ son allocation initiale.

Hypothèses

- u_j de classe $\mathcal{C}^2$.
- $\dfrac{\partial u_j(x_{1j}, x_{2j})}{\partial x_{\ell j}} > 0$, pour $j = a, b$ et $\ell = 1, 2$.
- $\dfrac{\partial^2 u_j(x_{1j}, x_{2j})}{\partial x_{\ell j}^2} < 0$ et $\dfrac{\partial^2 u_j(x_{1j}, x_{2j})}{\partial x_{1j} \partial x_{2j}} > 0$, pour $j = a, b$ et $\ell = 1, 2$.

$\Rightarrow$ u_j quasi-concave.

4. Deux consommateurs
4.1 Optimum de Pareto
4.2 Équilibre concurrentiel

- Le programme de maximisation du bien-être social :

$$\mathscr{P}_{BES} \left| \begin{array}{l} \displaystyle\operatorname*{Max}_{\{x_{1a}, x_{2a}, x_{1b}, x_{2b}\}} \alpha u_a(x_{1a}, x_{2a}) + \beta u_b(x_{1b}, x_{2b}) \\ slc\ x_{1a} + x_{1b} = w_1 \text{ et } x_{2a} + x_{2b} = w_2 \end{array} \right. \tag{7}$$

$\Rightarrow$ Le programme est donc :

$$\mathscr{P}_{BES} \left| \operatorname*{Max}_{\{x_{1a}, x_{2a}\}} \alpha u_a(x_{1a}, x_{2a}) + \beta u_b(w_1 - x_{1a}, w_2 - x_{2a}) \right. \tag{8}$$

$$\boxed{\text{CN1}} \left\{ \begin{array}{l} \alpha \dfrac{\partial u_a(x_{1a}, x_{2a})}{\partial x_{1a}} - \beta \dfrac{\partial u_b(w_1 - x_{1a}, w_2 - x_{2a})}{\partial x_{1b}} = 0 \\ \alpha \dfrac{\partial u_a(x_{1a}, x_{2a})}{\partial x_{2a}} - \beta \dfrac{\partial u_b(w_1 - x_{1a}, w_2 - x_{2a})}{\partial x_{2b}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\partial u_a(x_{1a}, x_{2a})}{\partial x_{1a}}}{\dfrac{\partial u_a(x_{1a}, x_{2a})}{\partial x_{2a}}} = \frac{\dfrac{\partial u_b(w_1 - x_{1a}, w_2 - x_{2a})}{\partial x_{1b}}}{\dfrac{\partial u_b(w_1 - x_{1a}, w_2 - x_{2a})}{\partial x_{2b}}}$$

$\Leftrightarrow$ $TmS_{(1,2)a} = TmS_{(1,2)b}$

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 4 – Préférences consommateur a

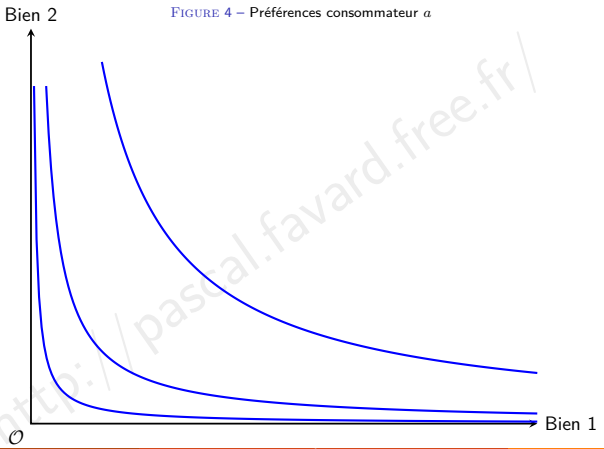
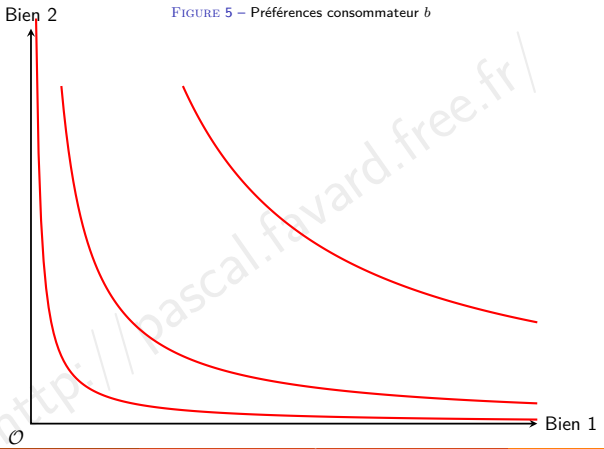


FIGURE 5 – Préférences consommateur b



La boîte !

- Francis Ysidro Edgeworth (1845-1926) : économiste, mathématicien et avocat irlandais.
- Un des plus importants représentants de l'École néoclassique.

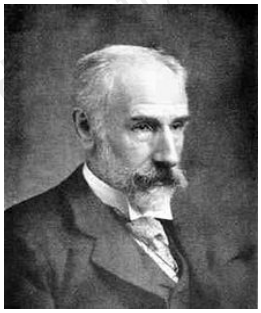


FIGURE 6 – Boîte d'Edgeworth

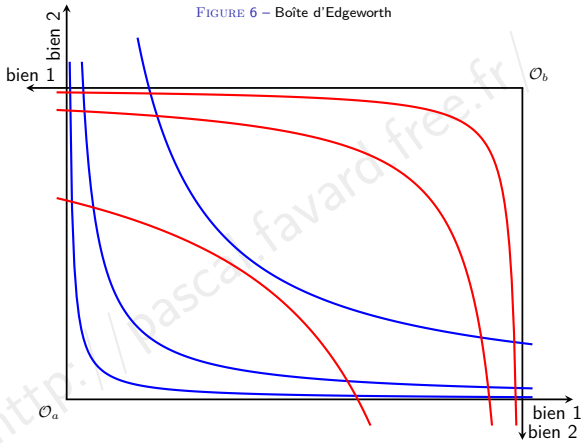


FIGURE 6 – Boîte d'Edgeworth

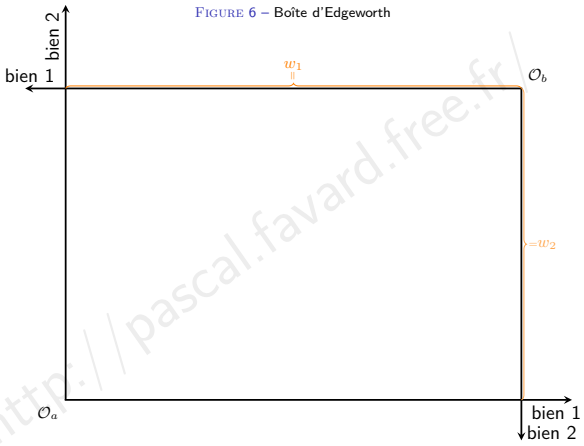


FIGURE 6 – Boîte d'Edgeworth

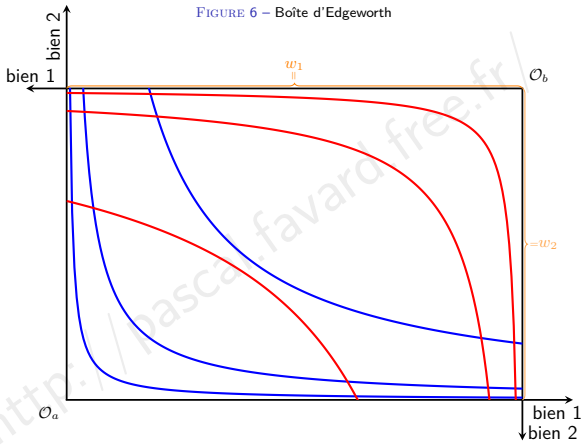


FIGURE 7 – Paniers Pareto-dominants

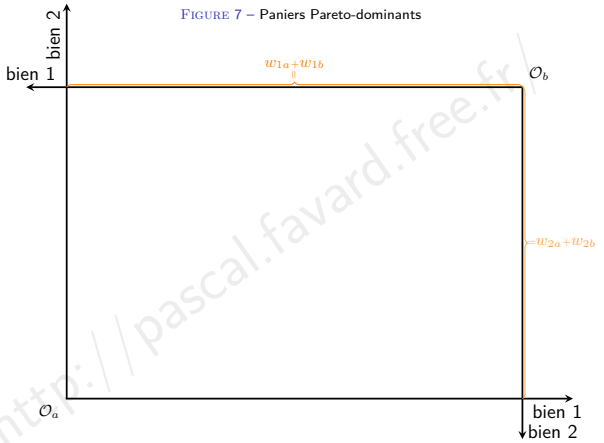
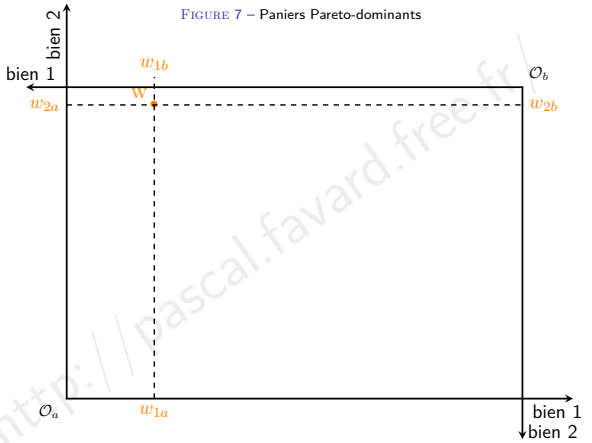


FIGURE 7 – Paniers Pareto-dominants



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 7 – Paniers Pareto-dominants

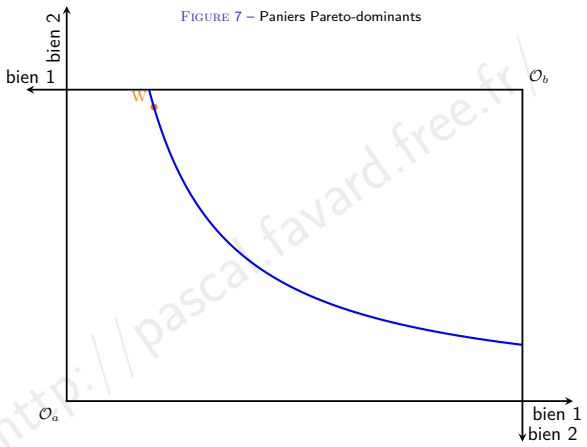


FIGURE 7 – Paniers Pareto-dominants

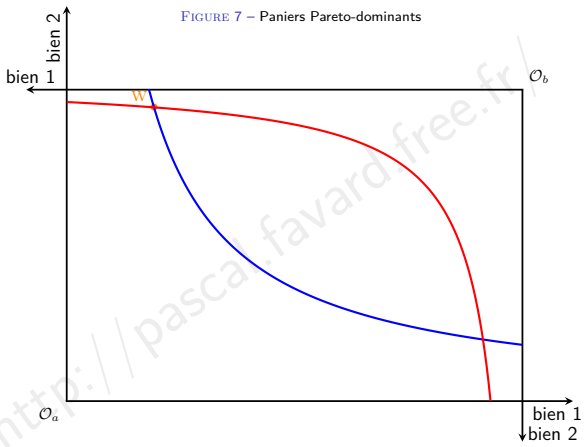


FIGURE 7 – Paniers Pareto-dominants

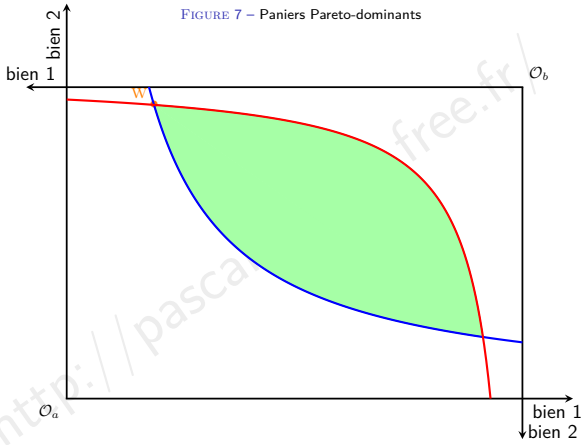


FIGURE 8 – Courbes des contrats

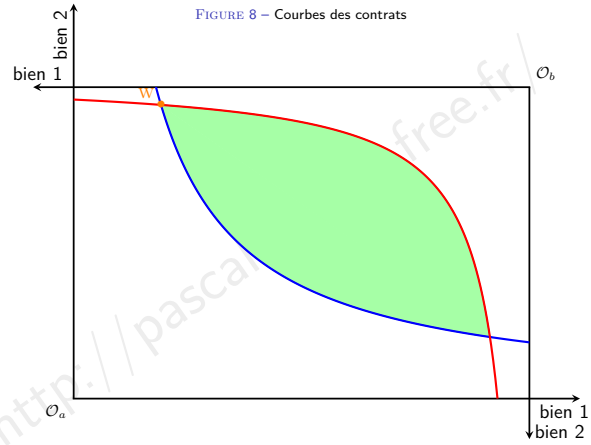


FIGURE 8 – Courbes des contrats

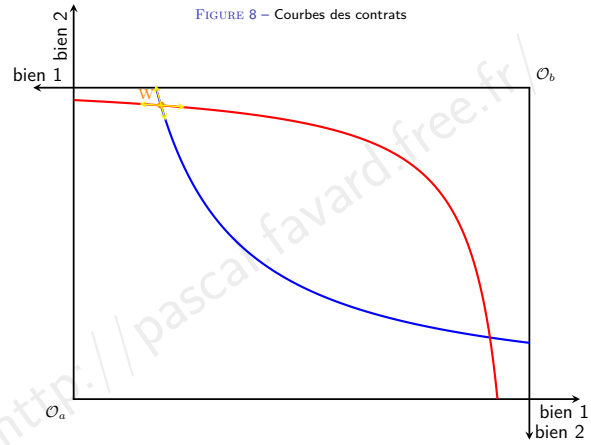


FIGURE 8 – Courbes des contrats

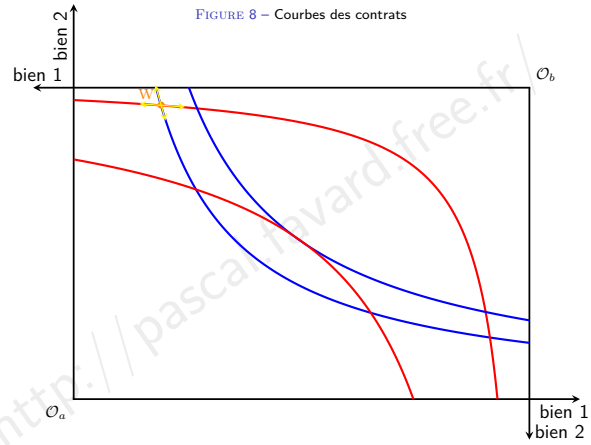


FIGURE 8 – Courbes des contrats

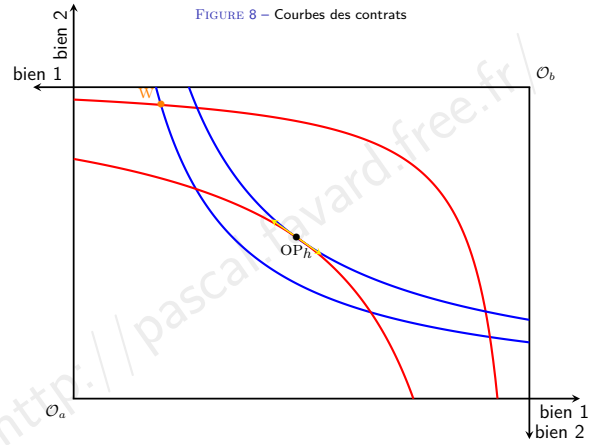
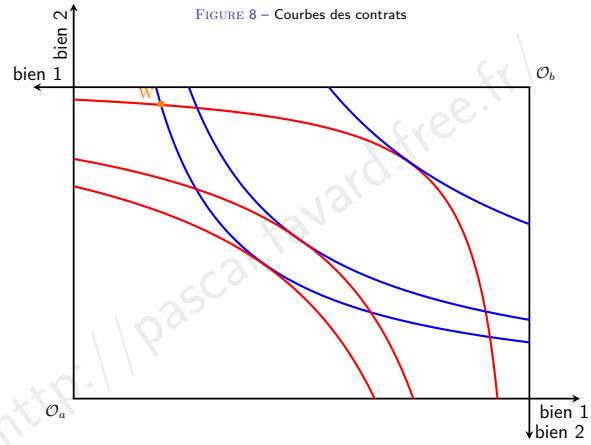


FIGURE 8 – Courbes des contrats



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 8 – Courbes des contrats

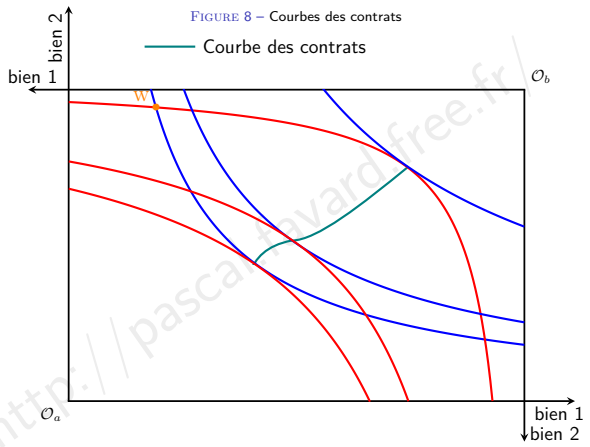
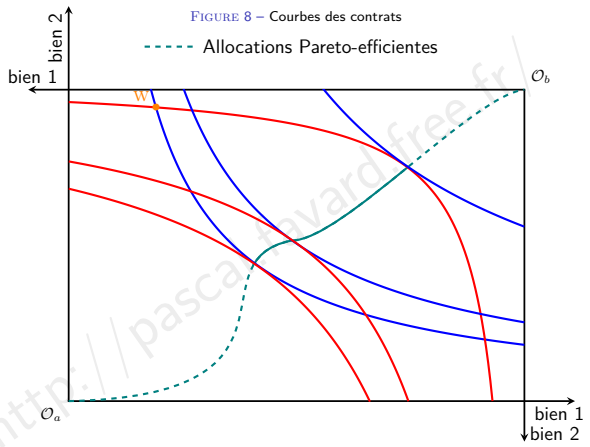


FIGURE 8 – Courbes des contrats



4. Deux consommateurs
4.1 Optimum de Pareto
4.2 Équilibre concurrentiel

- Le programme du consommateur j :

$$\mathscr{P}_j \left| \begin{array}{l} \underset{\{x_{1j},x_{2j}\}}{\text{Max}} \; u_j(x_{1j},x_{2j}) \\ \quad slc \; p_1x_{1j}+p_2x_{2j}=p_1w_{1j}+p_2w_{2j} \end{array} \right. \tag{9}$$

$\Rightarrow$ Le programme est donc :

$$\mathscr{P}_j \left| \underset{\{x_{1j}\}}{\text{Max}} \; u_j(x_{1j},\frac{p_1w_{1j}+p_2w_{2j}}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_{1j}) \right. \tag{10}$$

$$\boxed{\text{CN1}} \quad \frac{\partial u_j(x_{1j},\frac{p_1w_{1j}+p_2w_{2j}}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_{1j})}{\partial x_{1j}}-\frac{p_1}{p_2}\frac{\partial u_j(x_{1j},\frac{p_1w_{1j}+p_2w_{2j}}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_{1j})}{\partial x_{2j}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\partial u_j(x_{1j},\frac{p_1w_{1j}+p_2w_{2j}}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_{1j})}{\partial x_{1j}}}{\dfrac{\partial u_j(x_{1j},\frac{p_1w_{1j}+p_2w_{2j}}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_{1j})}{\partial x_{2j}}}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$\Leftrightarrow TmS_{(1,2)j}=-\frac{p_1}{p_2}$$

$$\Leftrightarrow TmS_{(1,2)a}=TmS_{(1,2)b}=-\frac{p_1}{p_2}$$

- Cette condition est nécessaire mais pas suffisante !
- Pas de demande excédentaire avec le système de prix

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{1a}+x_{1b}=w_1 \\ x_{2a}+x_{2b}=w_2 \end{array} \right.$$

FIGURE 9 – Équilibre concurrentiel

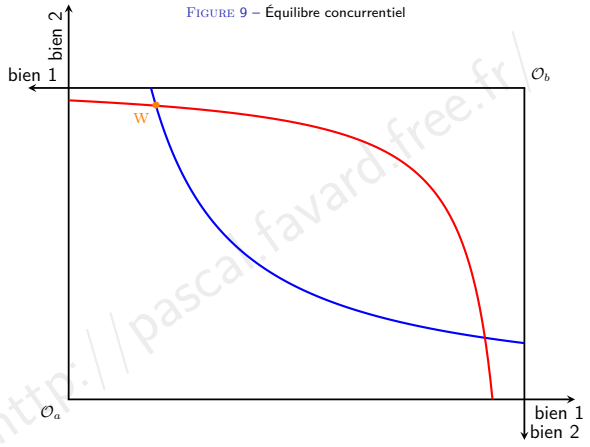
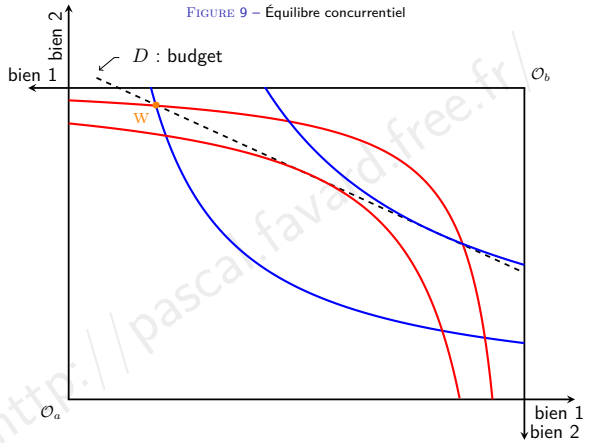


FIGURE 9 – Équilibre concurrentiel



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 9 – Équilibre concurrentiel

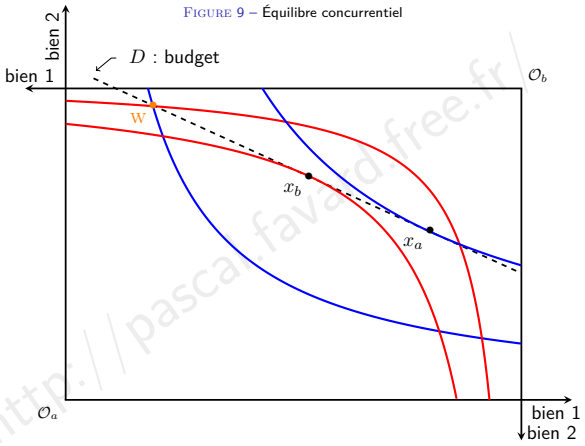


FIGURE 9 – Équilibre concurrentiel

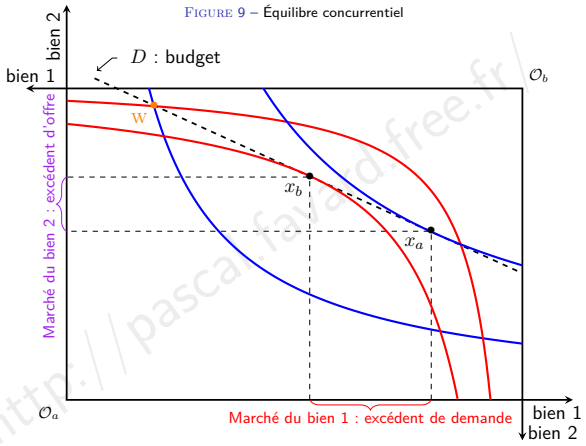


FIGURE 9 – Équilibre concurrentiel

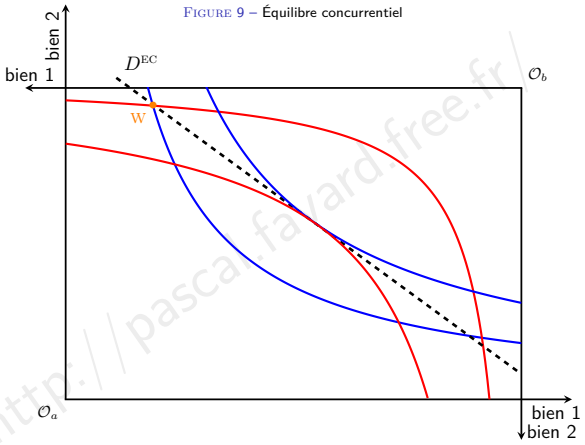
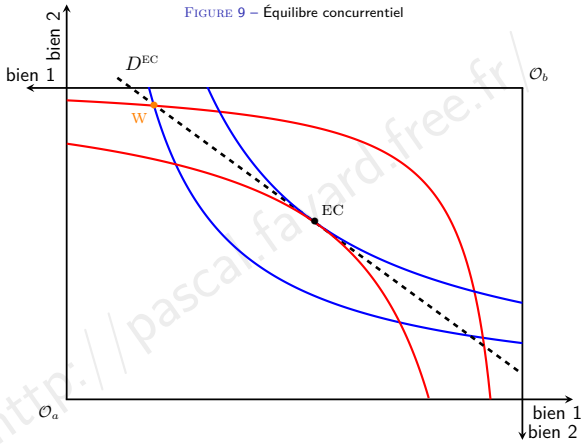


FIGURE 9 – Équilibre concurrentiel



1. Introduction

2. Définitions

3. Un consommateur : Robinson Crusoé

4. Deux consommateurs

5. Deux consommateurs et deux producteurs

- Robinson : 1 consommateur 1 producteur
- Boite d'Edgeworth : 2 consommateurs 0 producteur
- Ici : 2 consommateurs 2 producteurs

5. Deux consommateurs et deux producteurs
5.1 Le modèle
5.2 Possibilités de Production
5.3 Optimum de Pareto
5.4 Équilibre concurrentiel

- Deux inputs : $\vec{z} = (k, t)$ & Deux outputs : $\vec{y} = (y_f, y_g)$
- Deux entreprises : $f(\vec{z}_f) = f(k_f, t_f) = y_f$ et $g(\vec{z}_g) = g(k_g, t_g) = y_g$
- Deux consommateurs : $u_a(\vec{x}_a) = u_a(x_{fa}, x_{ga})$ et $u_b(\vec{x}_b) = u_b(x_{fb}, x_{gb})$
- Prix inputs : $\vec{p}_z = (r, w)$ & Prix outputs : $\vec{p}_y = (p_f, p_g)$
- Dotations initiales : $\vec{z}_a = (k_a, t_a)$ et $\vec{z}_b = (K - k_a, T - t_a)$

http://pascal.favard.free.fr/

- Parts sociales : $\vec{\alpha}_a = (\alpha_{fa}, \alpha_{ga})$ et $\vec{\alpha}_b = (1-\alpha_{fa}, 1-\alpha_{ga})$
- $\vec{\pi} = (\pi_f, \pi_g) = (p_f f(\vec{z}_f) - \vec{p}_z \vec{z}_f, p_g g(\vec{z}_g) - \vec{p}_z \vec{z}_g)$
- $\vec{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}_a, \mathcal{R}_b) = (\vec{p}_z \vec{z}_a + \vec{\alpha}_a \vec{\pi}, \vec{p}_z \vec{z}_b + \vec{\alpha}_b \vec{\pi})$
- f, g, u_a, u_b : $\mathcal{C}^2$ et strictement concaves.

5. Deux consommateurs et deux producteurs
5.1 Le modèle
5.2 Possibilités de Production
5.3 Optimum de Pareto
5.4 Équilibre concurrentiel

Ensemble des Possibilités de Production

Définition :

$$EPP = \{(y_f, y_g) | \vec{y} \gg \vec{o}; \vec{z} \gg \vec{o}; k_f + k_g \leq K; \\ t_f + t_g \leq T; y_f \leq f(\vec{z}_f); y_g \leq g(\vec{z}_g)\}$$

Efficience technique

Définition :

Il est impossible d'accroitre la production d'un bien sans réduire la production d'au moins un autre bien.

Frontière des Possibilités de Production

- Le programme pour déterminer $y_g^*(y_f)$:

$$\mathscr{P}_{FPP} \left| \begin{array}{l} \underset{\{k_g, t_g\}}{\text{Max}}\ g(k_g, t_g) \\ slc\ f(K-k_g, T-t_g) = \bar{y}_f \end{array} \right. \tag{11}$$

$\Rightarrow$ Le programme est donc :

$$\mathscr{P}_{FPP} \left| \underset{\{k_g, t_g, \lambda\}}{\text{Max}}\ \mathcal{L}(k_g, t_g, \lambda) = g(k_g, t_g) + \lambda\left[\bar{y}_f - f(K-k_g, T-t_g)\right] \right. \tag{12}$$

$$\boxed{\text{CN1}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{L}(k_g, t_g, \lambda)}{\partial k_g} = \dfrac{\partial g(k_g, t_g)}{\partial k_g} + \lambda \dfrac{\partial f(K-k_g, T-t_g)}{\partial k_f} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(k_g, t_g, \lambda)}{\partial t_g} = \dfrac{\partial g(k_g, t_g)}{\partial t_g} + \lambda \dfrac{\partial f(K-k_g, T-t_g)}{\partial t_f} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\partial g(k_g, t_g)}{\partial k_g}}{\dfrac{\partial g(k_g, t_g)}{\partial t_g}} = \frac{\dfrac{\partial f(K-k_g, T-t_g)}{\partial k_f}}{\dfrac{\partial f(K-k_g, T-t_g)}{\partial t_f}} \Rightarrow \frac{Pm_k}{Pm_t}\Big|_g = \frac{Pm_k}{Pm_t}\Big|_f$$

$$\Rightarrow TmST_{(k,t)g} = \frac{\mathrm{d}t_g}{\mathrm{d}k_g} = TmST_{(k,t)f} = \frac{\mathrm{d}t_f}{\mathrm{d}k_f}$$

Mais aussi...

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\partial g(k_g, t_g)}{\partial k_g}}{\dfrac{\partial f(K-k_g, T-t_g)}{\partial k_f}} = \frac{\dfrac{\partial g(k_g, t_g)}{\partial t_g}}{\dfrac{\partial f(K-k_g, T-t_g)}{\partial t_f}}$$

$$\Rightarrow TmT_{(y_g, y_f)} = \frac{\mathrm{d}k_f}{\mathrm{d}k_g} = TmT_{(y_g, y_f)} = \frac{\mathrm{d}t_f}{\mathrm{d}t_g}$$

5. Deux consommateurs et deux producteurs
5.1 Le modèle
5.2 Possibilités de Production
5.3 Optimum de Pareto
5.4 Équilibre concurrentiel

http://pascal.favard.free.fr/

Maximisation du bien-être social

$$\underset{\{x_a,x_b,z_f,z_g\}}{\text{Max}} \mathcal{L}(\cdot) = \beta u_a(x_{fa},x_{ga}) + (1-\beta)u_b(x_{fb},x_{gb})$$
$$+\mu\left[x_{fa}+x_{fb}-f(k_f,t_f)\right]+\nu\left[x_{ga}+x_{gb}-g(k_g,t_g)\right]$$
$$+\eta\left[K-k_f-k_g\right]+\epsilon\left[T-t_f-t_g\right]$$

$$\text{CN1}\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_{fa}} = \beta\dfrac{\partial u_a(x_{fa},x_{ga})}{\partial x_{fa}} + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_{ga}} = \beta\dfrac{\partial u_a(x_{fa},x_{ga})}{\partial x_{ga}} + \nu = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_{fb}} = (1-\beta)\dfrac{\partial u_b(x_{fb},x_{gb})}{\partial x_{fb}} + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial x_{gb}} = (1-\beta)\dfrac{\partial u_b(x_{fb},x_{gb})}{\partial x_{gb}} + \nu = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow TmS_{(x_g,x_f),a}|_* = TmS_{(x_g,x_f),b}|_*$$

suite...

$$\text{CN1}\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial k_f} = -\mu\dfrac{\partial f(k_f,t_f))}{\partial k_f} - \eta = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial k_g} = -\nu\dfrac{\partial g(k_g,t_g)}{\partial k_g} - \eta = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial t_f} = -\mu\dfrac{\partial f(k_f,t_f)}{\partial t_f} - \epsilon = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(\cdot)}{\partial t_g} = -\nu\dfrac{\partial g(k_g,t_g)}{\partial t_g} - \epsilon = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow TmST_{(k,t)g}|_* = \frac{\mathrm{d}t_g}{\mathrm{d}k_g}|_* = TmST_{(k,t)f}|_* = \frac{\mathrm{d}t_f}{\mathrm{d}k_f}|_*$$

$$\boxed{\Rightarrow TmT_{(y_g,y_f)}|_* = TmS_a|_* = TmS_b|_* = TmT_{(y_g,y_f)}|_*}$$

Figure 10 – Optimum de Pareto

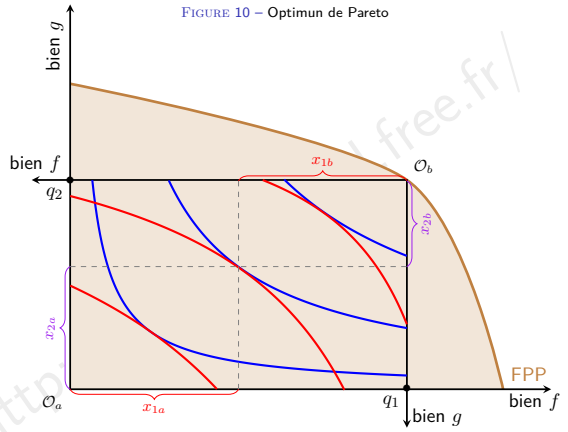
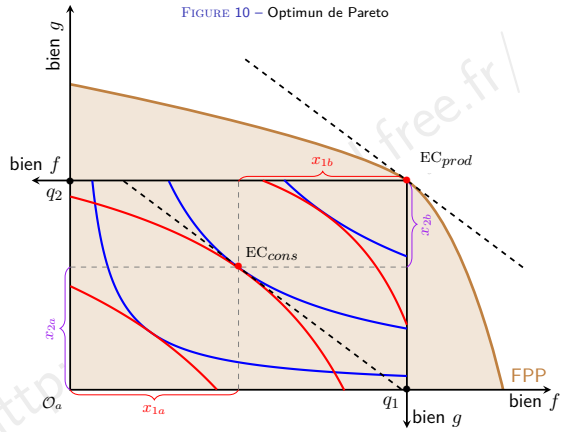


Figure 10 – Optimun de Pareto



5. Deux consommateurs et deux producteurs
5.1 Le modèle
5.2 Possibilités de Production
5.3 Optimum de Pareto
5.4 Équilibre concurrentiel

Rapidement ! ! !

$$\text{CN1} \Rightarrow \begin{cases} TmS_{(x_g,x_f),a}|_* = \dfrac{p_g}{p_f} = TmS_{(x_g,x_f),b}|_* \\ p_f\dfrac{\partial f(k_f,t_f))}{\partial k_f}|_* = r = p_g\dfrac{\partial g(k_g,t_g)}{\partial k_g}|_* \\ p_f\dfrac{\partial f(k_f,t_f)}{\partial t_f}|_* = w = p_g\dfrac{\partial g(k_g,t_g)}{\partial t_g}|_* \end{cases}$$

$$\boxed{TmST_{(k,t)g}|_* = \frac{\mathrm{d}t_g}{\mathrm{d}k_g}|_* = \frac{r}{w} = TmST_{(k,t)f}|_* = \frac{\mathrm{d}t_f}{\mathrm{d}k_f}|_*}$$

$$\boxed{TmT_{(y_g,y_f)}|_* = TmS_a|_* = \frac{p_g}{p_f} = TmS_b|_* = TmT_{(y_g,y_f)}|_*}$$

http://pascal.favard.free.fr/

Table des matières (Diapo : 1)

1. Introduction

2. Définitions
2.1 Allocation économique
2.2 Optimalité paretienne
2.3 Équilibre concurrentiel
2.4 Théorèmes fondamentaux de l'économie du bien-être

3. Un consommateur : Robinson Crusoé
3.1 Optimum de Pareto
3.2 Équilibre concurrentiel
3.3 Existence d'un équilibre
3.4 Premier théorème de l'économie du bien-être

4. Deux consommateurs
4.1 Optimum de Pareto
4.2 Équilibre concurrentiel

Table des matières (Diapo : 2)

5. Deux consommateurs et deux producteurs
5.1 Le modèle
5.2 Possibilités de Production
5.3 Optimum de Pareto
5.4 Équilibre concurrentiel

Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

UNIVERSITÉ FRANÇOIS - RABELAIS TOURS

Les chapitres : L2 & L3

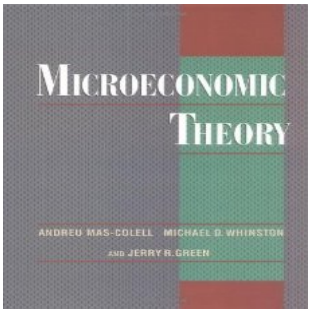
1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole
9. Équilibre de Nash

Chapitre 8 :

« Monopole »

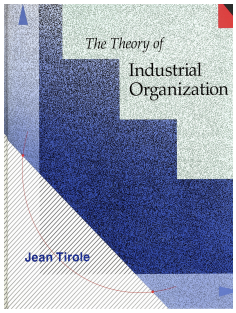
Vive la lecture !

1. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
2. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



Vive la lecture !

1. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
2. « The Theory of Industrial Organization », by J. Tirole, MIT Press



Plan

1. Introduction
2. Équilibre sur un marché avec monopole
3. Politique de prix non uniforme

1. Introduction
2. Équilibre sur un marché avec monopole
3. Politique de prix non uniforme

http://pascal.favard.free.fr/

Bien

Définition :

Un bien est caractérisé par sa qualité, sa localisation dans le temps et l'espace et les conditions de sa disponibilité.

http://pascal.favard.free.fr/

Marché concurrentiel

- Libre entrée et libre sortie.
- Atomicité.
- Homogénéité.
- Information parfaite et gratuite pour tous les agents.
- Mobilité des facteurs de productions.

⇒ « price-taker ».

Terminologie

		Nb d'acheteurs		
		grand	petit	1
Nb de vendeurs	grand	CCP	oligopsone	monopsone
	petit	oligopole	☾	appel d'offre
	1	monopole	enchères	monopole bilatéral

Table 1 – Les différentes structures de marché

Monopole

Définition :
Une seule entreprise produit le bien échangé sur le marché considéré. Ce bien n'a pas de « substitut proche » aux yeux des consommateurs.

Causes

- Technologique : fonction de coût moyen de long terme décroissante ⇒ économies d'échelle ⇒ monopoles naturels.
- Juridique : droit de propriété sur un input ou brevet.
- Prédation : élimination des concurrents.
- Volonté de l'État : protectionnisme, contrôle d'un marché.

Conséquences

- ~~Libre entrée et libre sortie~~.
- ~~Atomicité~~.

⇏ « price-taker ».

Le Droit

- Sherman Act 1890 : « Every person who shall monopolize, or attempt to monopolize, or combine or conspire with any other person or persons, to monopolize any part of the trade or commerce among the several states, or with foreign nations, shall be deemed guilty of a felony. »
- Clayton Act 1914
- Droit de la concurrence en France et dans l'Union Européenne.
- DIRECCTE (Direction Régionale des Entreprises, de la Concurrence, de la Consommation, du travail et de l'emploi)

1. Introduction

2. Équilibre sur un marché avec monopole

3. Politique de prix non uniforme

2. Équilibre sur un marché avec monopole
2.1 La demande agrégée
2.2 Les fonctions de recette
2.3 Détermination de l'équilibre de marché
2.4 Mesure du pouvoir de marché
2.5 Perte de Surplus Social
2.6 Deux groupes de consommateurs

http://pascal.favard.free.fr/

Programme du monopole

$$\mathscr{P}_{Monopole} \left| \begin{array}{l} \underset{\{Q,p\}}{\text{Max}} \ \pi(Q,p) = pQ - C(Q) \\ slc \ 0 \leq Q \leq \mathcal{D}(p) \end{array} \right. \qquad (1)$$

- On ne considère qu'un seul marché.
- Les effets richesses (revenus) sont faibles.
- Les effets substitutions sur les autres biens sont faibles.
- J consommateurs sur le marché du bien. Dans l'économie il y a L biens, p le prix du bien produit par le monopole et $\vec{p}_{L-1}$ le vecteur prix des autres biens.

- La demande agrégée de bien :

$$\mathcal{D}(p) = \sum_{j=1}^{J} D_j(p; \vec{p}_{L-1}, \mathcal{R}_j)$$

hyp

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}(p)}{\mathrm{d}p} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\mathrm{d}D_j(\cdot)}{\mathrm{d}p} < 0$$

- L'élasticité-prix directe de la demande totale = la moyenne pondérée des élasticités-prix directes individuelles :

$$\mathcal{E}^{\mathcal{D}} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{D}(p)}{\mathrm{d}p}\frac{p}{Q} = \sum_{j=1}^{J} \frac{\mathrm{d}D_j(\cdot)}{\mathrm{d}p}\frac{p}{Q} = \sum_{j=1}^{J} \frac{D_j(\cdot)}{Q}\varepsilon^j$$

Figure 1 – Courbe de demande inverse agrégée

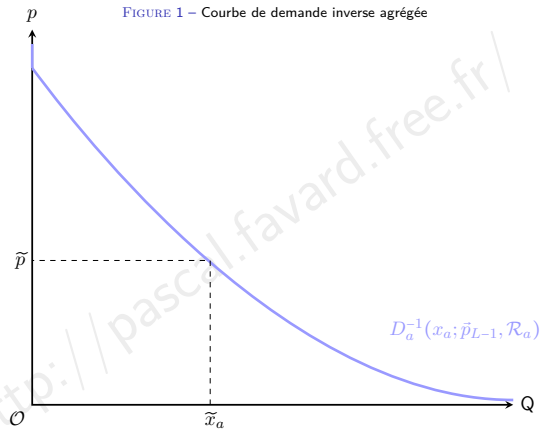


Figure 1 – Courbe de demande inverse agrégée

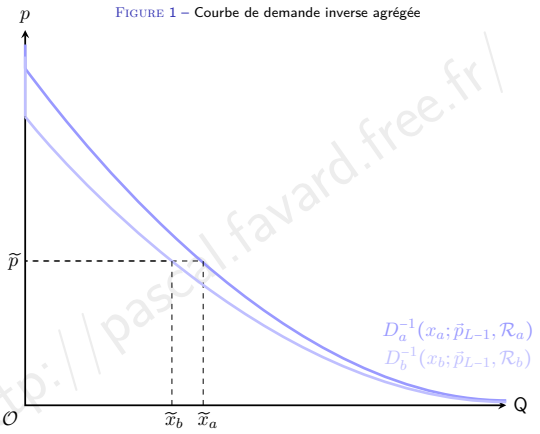
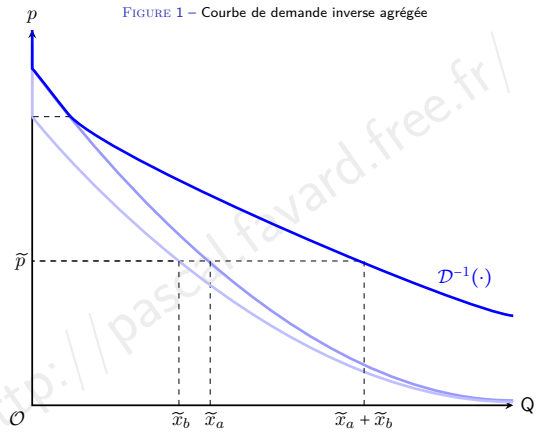


Figure 1 – Courbe de demande inverse agrégée



2. Équilibre sur un marché avec monopole
2.1 La demande agrégée
2.2 Les fonctions de recette
2.3 Détermination de l'équilibre de marché
2.4 Mesure du pouvoir de marché
2.5 Perte de Surplus Social
2.6 Deux groupes de consommateurs

- Recette : $R(Q) = P(Q)Q = \mathcal{D}^{-1}(Q)Q$.
- Recette moyenne : $RM(Q) = \dfrac{R(Q)}{Q} = P(Q) = \mathcal{D}^{-1}(Q)$.
- Recette marginale : $Rm(Q) = \dfrac{\mathrm{d}R(Q)}{\mathrm{d}Q} = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q)}{\mathrm{d}Q}Q + \mathcal{D}^{-1}(Q)$.

$\Rightarrow$ La demande étant décroissante on a : $\forall Q \geq 0, \ Rm(Q) \leq RM(Q)$.

$\neq$ Concurrence pure et parfaite où : $\forall Q \geq 0, \ Rm(Q) = RM(Q) = p$.

http://pascal.favard.free.fr/

2. Équilibre sur un marché avec monopole
2.1 La demande agrégée
2.2 Les fonctions de recette
2.3 Détermination de l'équilibre de marché
2.4 Mesure du pouvoir de marché
2.5 Perte de Surplus Social
2.6 Deux groupes de consommateurs

Programme du monopole

$$\mathscr{P}_{Monopole} \left| \underset{\{Q\}}{\text{Max}} \ \pi(Q) = \mathcal{D}^{-1}(Q)Q - C(Q) \right. \qquad (2)$$

CN1 : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}Q^{Mo} + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) - \dfrac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q} = 0$

CS2 : $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{D}^{-1}(Q)}{\mathrm{d}Q^2}Q + 2\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q)}{\mathrm{d}Q} - \dfrac{\mathrm{d}^2C(Q)}{\mathrm{d}Q^2} \overset{?}{<} 0$

Analyse de la CN1

$Rm(Q^{Mo})$

$Cm(Q^{Mo})$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}Q^{Mo} + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) = \frac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$$

– de recette

+ de recette : p^{Mo}

Analyse de la CN1

$Rm(Q^{Mo})$

$Cm(Q^{Mo})$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}Q^{Mo} + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) = \frac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$$

– de recette

+ de recette : p^{Mo}

Analyse de la CN1

$Rm(Q^{Mo})$

$Cm(Q^{Mo})$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}Q^{Mo} + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) = \frac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$$

– de recette

+ de recette : p^{Mo}

Analyse de la CN1

$Rm(Q^{Mo})$

$Cm(Q^{Mo})$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}Q^{Mo} + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) = \frac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$$

– de recette

+ de recette : p^{Mo}

Figure 2 – Choix du monopole

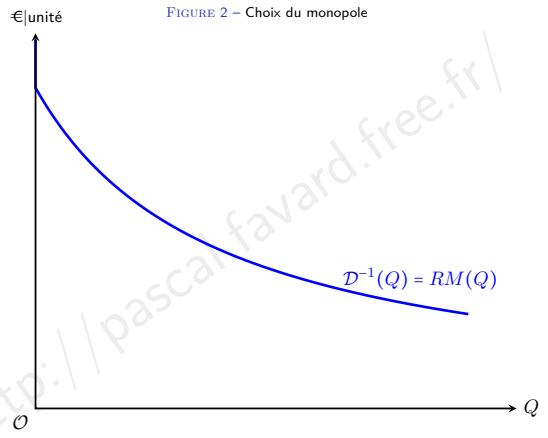
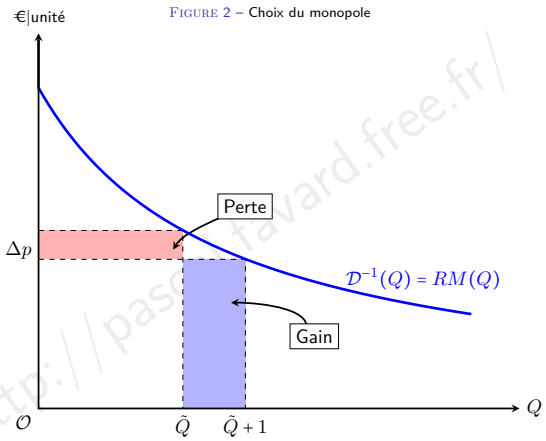


Figure 2 – Choix du monopole



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 2 – Choix du monopole

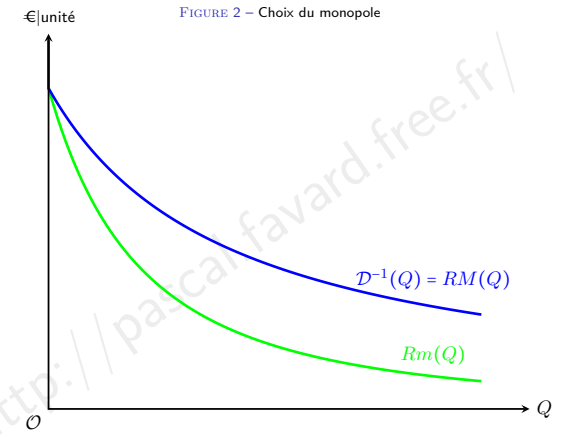


FIGURE 2 – Choix du monopole

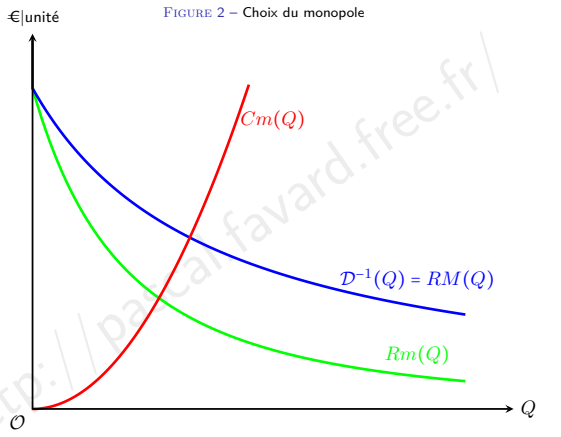


FIGURE 2 – Choix du monopole

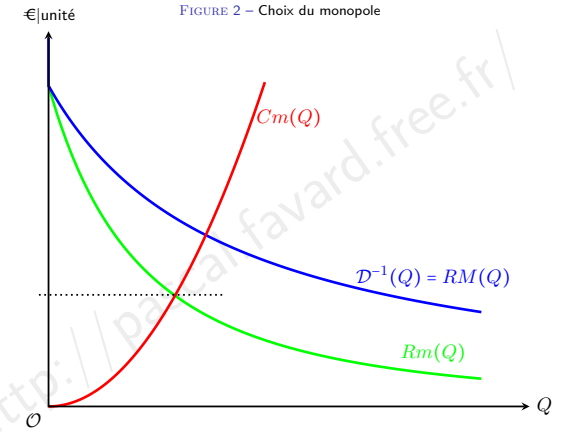


FIGURE 2 – Choix du monopole

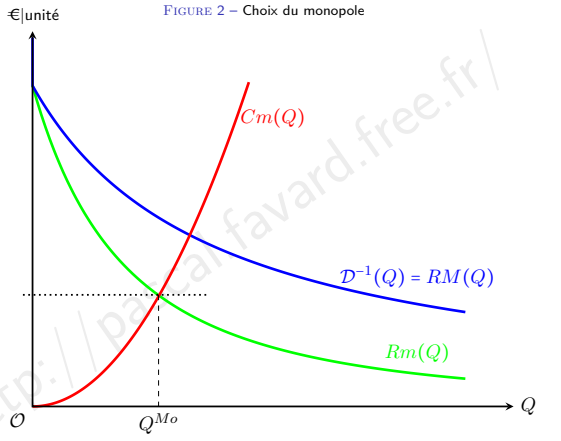


FIGURE 2 – Choix du monopole

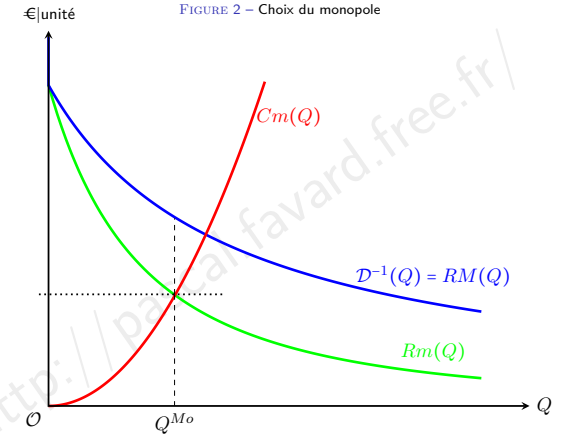


FIGURE 2 – Choix du monopole

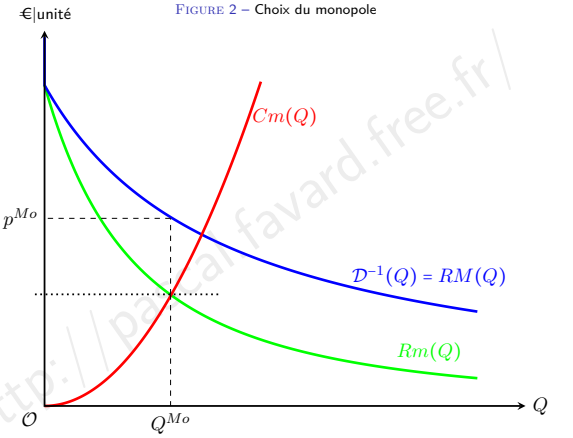
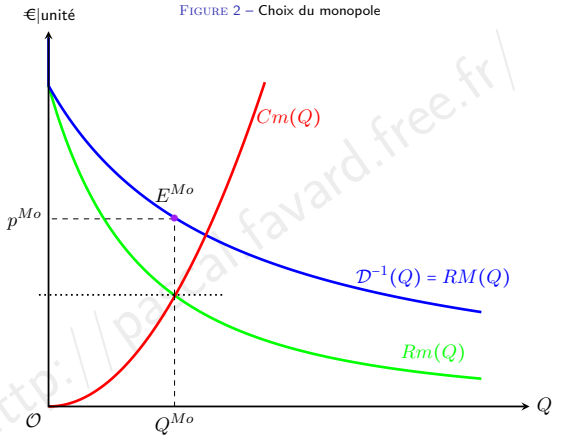


FIGURE 2 – Choix du monopole



2. Équilibre sur un marché avec monopole
2.1 La demande agrégée
2.2 Les fonctions de recette
2.3 Détermination de l'équilibre de marché
2.4 Mesure du pouvoir de marché
2.5 Perte de Surplus Social
2.6 Deux groupes de consommateurs

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 3 – E^{Mo} Vs E^{Co}

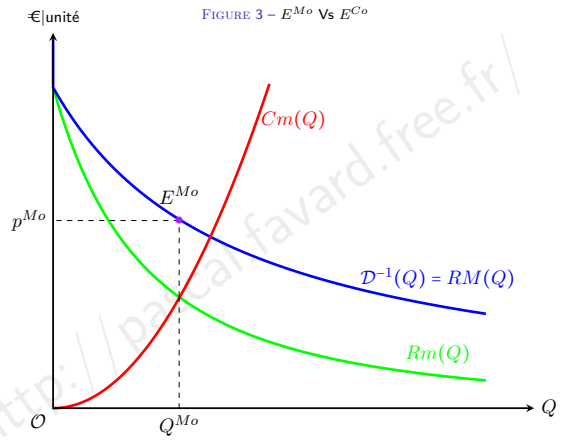
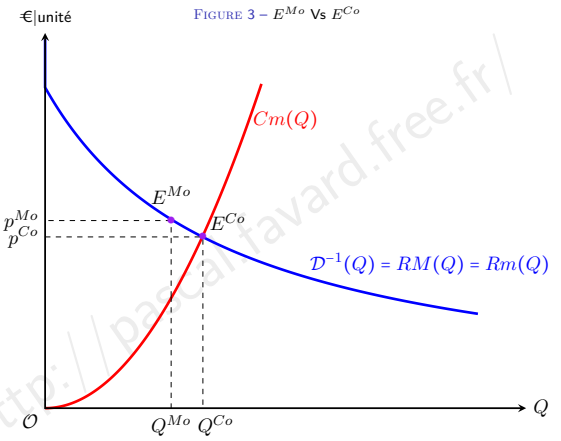


FIGURE 3 – E^{Mo} Vs E^{Co}



CN1 $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q} Q^{Mo} + p^{Mo} = Cm(Q^{Mo})$

$$\Leftrightarrow p^{Mo} - Cm(Q^{Mo}) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q} Q^{Mo} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^{Mo} - Cm(Q^{Mo})}{p^{Mo}} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q} \frac{Q^{Mo}}{p^{Mo}} = -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}\mathcal{D}(p^{Mo})}{\mathrm{d}p} \frac{p^{Mo}}{Q^{Mo}}}$$

Histoire

- Abba Ptachya Lerner (1903-1982) économiste né en Russie.
- « The Concept of Monopoly and the Measurement of Monopoly Power », [1934], The Review of Economic Studies 1 (3) : 157-175.

Markup / Indice de Lerner

$$\mathcal{I}_L = \frac{p^{Mo} - Cm(Q^{Mo})}{p^{Mo}} = -\frac{1}{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(p^{Mo})}$$

Markup / Indice de Lerner

- Indice de Lerner : écart relatif entre le prix unitaire et la coût marginal

$$\mathcal{I}_L = \frac{p^{Mo} - Cm(Q^{Mo})}{p^{Mo}} = -\frac{1}{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(p^{Mo})}$$

Markup / Indice de Lerner

- Indice de Lerner : écart relatif entre le prix unitaire et la coût marginal

$$\mathcal{I}_L = \frac{p^{Mo} - Cm(Q^{Mo})}{p^{Mo}} = -\frac{1}{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(p^{Mo})}$$

- |Inverse de l'élasticité-prix de la demande totale|

$$\Leftrightarrow p^{Mo} = \left[\frac{\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(p^{Mo})}{1 + \mathcal{E}^{\mathcal{D}}(p^{Mo})}\right] Cm(Q^{Mo})$$

$p^{Mo} > 0 \Rightarrow |\mathcal{E}^{\mathcal{D}}(p^{Mo})| > 1$

- $p^{Mo} \xrightarrow{|\mathcal{E}^{\mathcal{D}}| \to \infty} Cm(Q^{Mo})$
- $\mathcal{I}_L \in [0, 1]$

http://pascal.favard.free.fr/

2. Équilibre sur un marché avec monopole
2.1 La demande agrégée
2.2 Les fonctions de recette
2.3 Détermination de l'équilibre de marché
2.4 Mesure du pouvoir de marché
2.5 Perte de Surplus Social
2.6 Deux groupes de consommateurs

FIGURE 4 – $SS_{E^{Mo}}$ Vs $SS_{E^{Co}}$

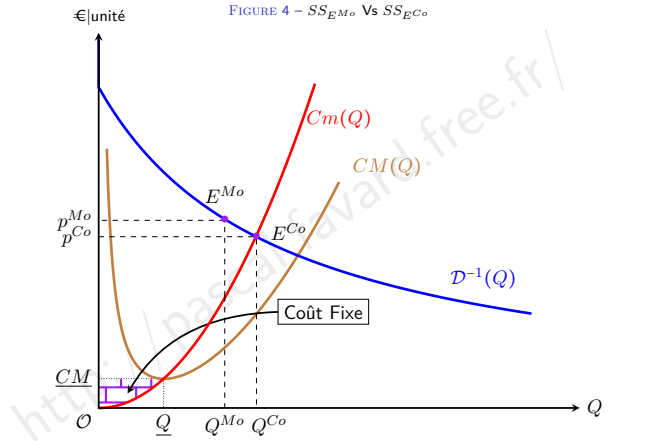


FIGURE 4 – $SS_{E^{Mo}}$ Vs $SS_{E^{Co}}$

FIGURE 4 – $SS_{E^{Mo}}$ Vs $SS_{E^{Co}}$

FIGURE 4 – $SS_{E^{Mo}}$ Vs $SS_{E^{Co}}$

FIGURE 4 – $SS_{E^{Mo}}$ Vs $SS_{E^{Co}}$

FIGURE 4 – $SS_{E^{Mo}}$ Vs $SS_{E^{Co}}$

http://pascal.favard.free.fr/

$$\boxed{\Delta SS = \int_{Q^{Mo}}^{Q^{Co}} \left(\mathcal{D}^{-1}(Q) - Cm(Q)\right) \mathrm{d}Q}$$

Faut-il taxer le monopole pour diminuer cette perte sociale ?

2. Équilibre sur un marché avec monopole
2.1 La demande agrégée
2.2 Les fonctions de recette
2.3 Détermination de l'équilibre de marché
2.4 Mesure du pouvoir de marché
2.5 Perte de Surplus Social
2.6 Deux groupes de consommateurs

Hypothèses

1. Deux groupes de consommateurs : $\mathcal{D}_a(Q_a)$ et $\mathcal{D}_b(Q_b)$
2. Demandes linéaires et $\forall Q \geq 0$: $\mathcal{D}_a^{-1}(Q) < \mathcal{D}_b^{-1}(Q)$
3. Fonction de coût du monopole $C(Q_a + Q_b)$ convexe.

Programme du monopole

$$\mathscr{P}_{Monopole} \left| \begin{array}{l} \underset{\{Q,p\}}{\text{Max}} \ \pi(Q,p) = pQ - C(Q) \\ slc \begin{cases} 0 \leq Q_a \leq \mathcal{D}_a(p) \\ 0 \leq Q_b \leq \mathcal{D}_b(p) \\ Q_a + Q_b = Q \end{cases} \end{array} \right. \tag{3}$$

Figure 5 – Deux groupes de consommateurs : Cas 1

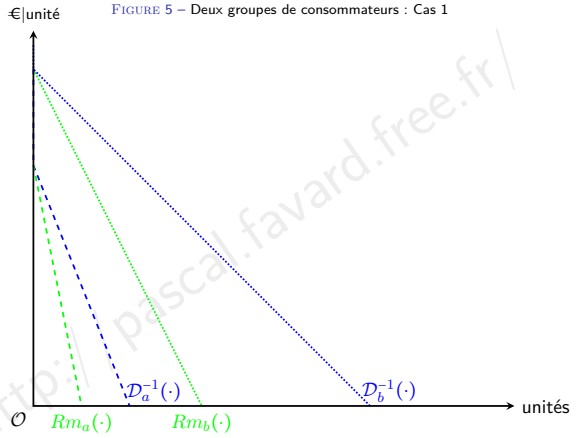


Figure 5 – Deux groupes de consommateurs : Cas 1

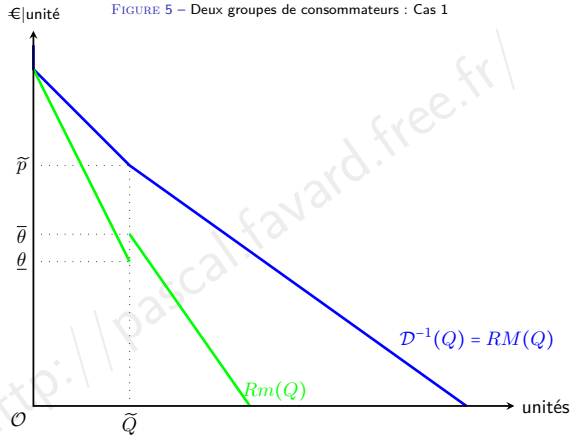


Figure 5 – Deux groupes de consommateurs : Cas 1

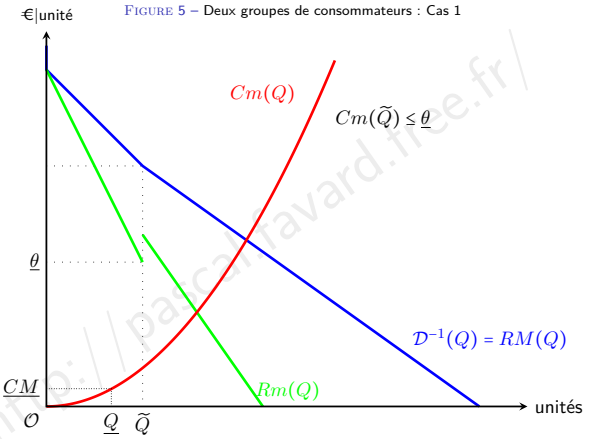
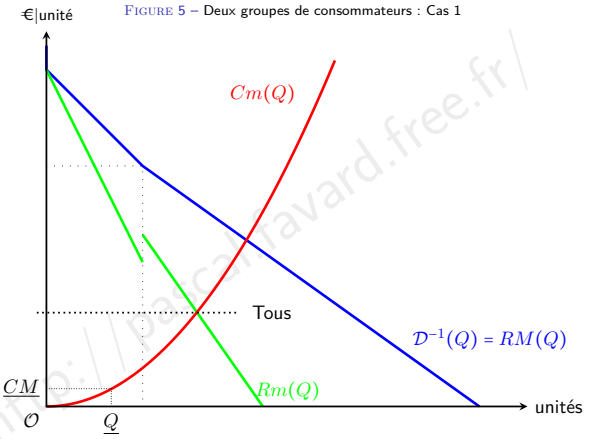


Figure 5 – Deux groupes de consommateurs : Cas 1



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 5 – Deux groupes de consommateurs : Cas 1

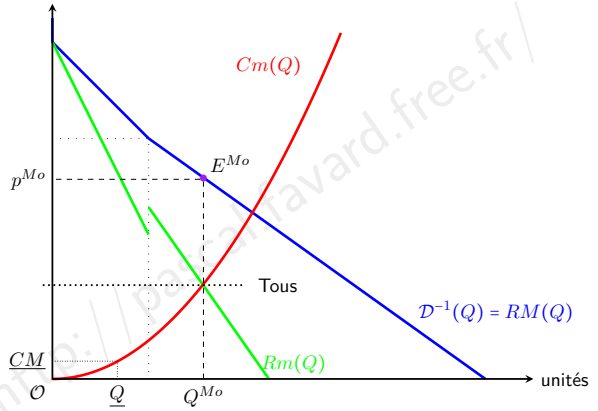


FIGURE 6 – Deux groupes de consommateurs : Cas 2

FIGURE 6 – Deux groupes de consommateurs : Cas 2

FIGURE 6 – Deux groupes de consommateurs : Cas 2

FIGURE 6 – Deux groupes de consommateurs : Cas 2

FIGURE 6 – Deux groupes de consommateurs : Cas 2

FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3

FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3

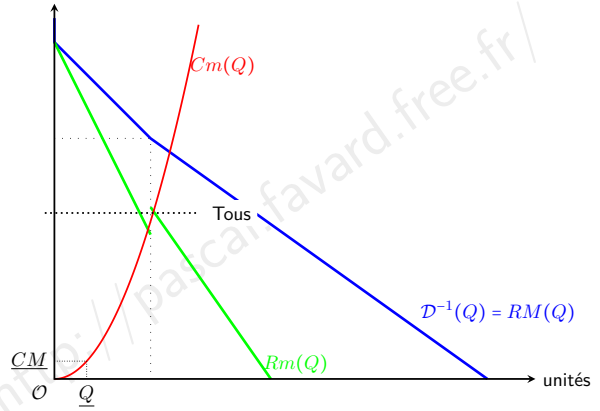


FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3

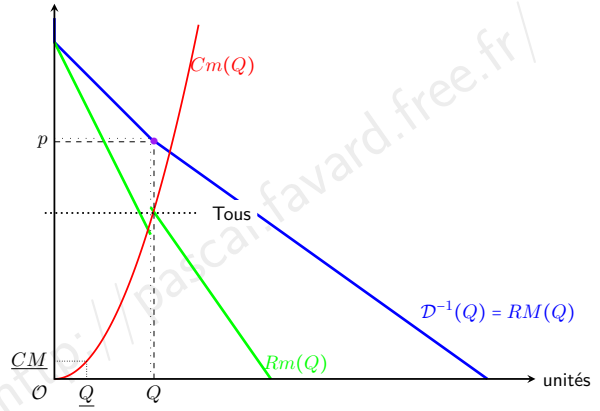


FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3

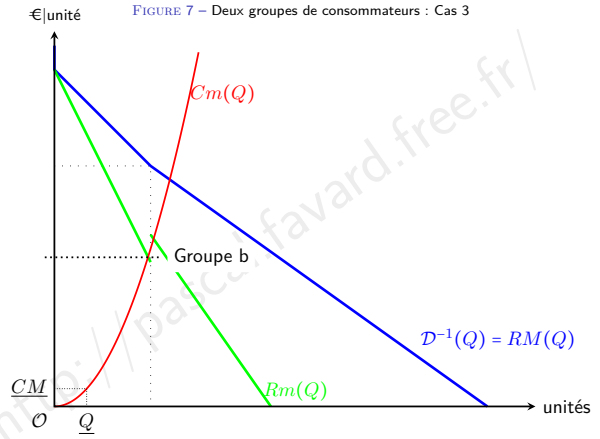


FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3

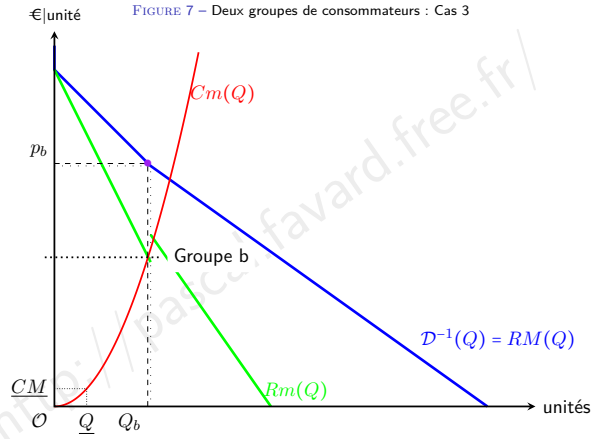


FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3

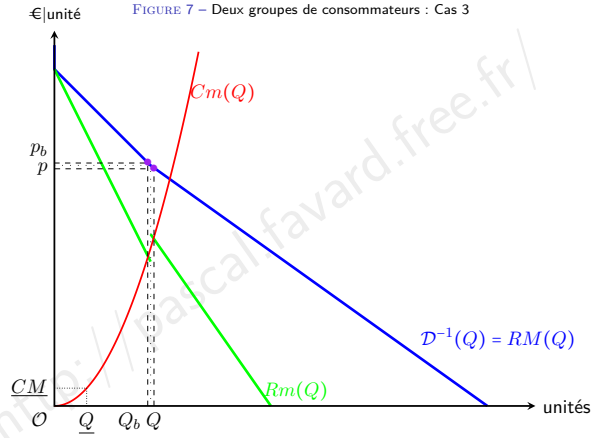


FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3

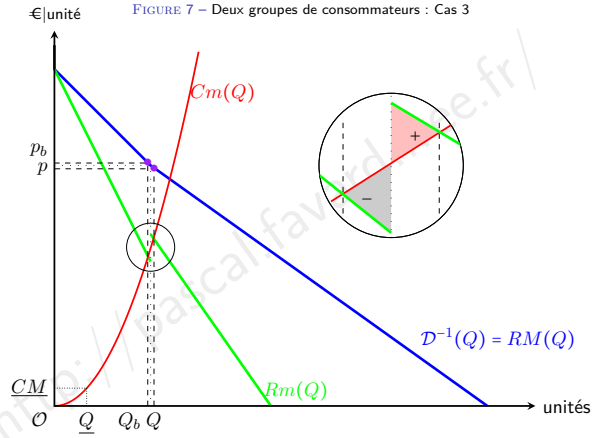
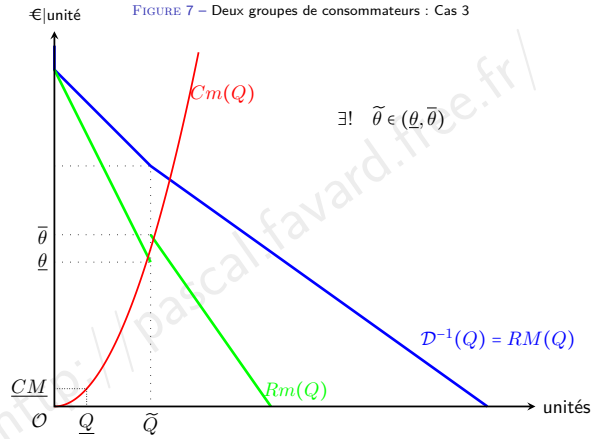


FIGURE 7 – Deux groupes de consommateurs : Cas 3



1. Introduction

2. Équilibre sur un marché avec monopole

3. Politique de prix non uniforme

http://pascal.favard.free.fr/

Discrimination par les prix

Définition :

Un producteur discrimine par le prix quand deux unités d'un même bien économique sont vendues à des prix différents, soit à des consommateurs différents soit à un même consommateur.

Discrimination ≠ différenciation

Prix unitaire différent pour un même bien.

- Prix unitaire dépend du consommateur.
- Prix unitaire dépend de la quantité achetée.

Conditions

- Avoir un pouvoir de marché.
- Disposition à payer connue.
- ~~Possibilité d'arbitrage~~ :
  - Transférabilité de la marchandise : revente « difficile ».
  - Transférabilité de la demande : autosélection.

3. Politique de prix non uniforme
3.1 La discrimination parfaite
3.2 La discrimination de degré 3
3.3 La discrimination de degré 2

Discrimination parfaite

Définition :

Le producteur discrimine parfaitement par le prix quand il peut « capturer » l'intégralité du surplus, généré par la consommation du bien considéré, de chacun des consommateurs.

Ne peut pas être mise en pratique : transférabilité et/ou information incomplète

Hypothèses

1. n consommateurs identiques $\Rightarrow \mathcal{D}(p) = nD(p)$
2. Toutes les fonctions sont $\mathcal{C}^2$

Programme du monopole

$$\mathscr{P}_{Monopole} \left| \; \underset{\{Q\}}{\text{Max}} \; SBC(Q) - C(Q) \right. \tag{4}$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathscr{P}_{Monopole} \left| \; \underset{\{Q\}}{\text{Max}} \; \int_0^Q \mathcal{D}^{-1}(x)\mathrm{d}x - C(Q) \right. \tag{5}$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathscr{P}_{Monopole} \left| \; \underset{\{q\}}{\text{Max}} \; n\int_0^q D^{-1}(x)\mathrm{d}x - C(nq) \right. \tag{6}$$

Programme du monopole

CN1 : $\underbrace{\dfrac{\mathrm{d}SBC(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}}_{=\mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo})} = \dfrac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$

$\Rightarrow \boxed{Q^{Mo} = nq^{Mo} = Q^{Co}}$

$\Rightarrow \boxed{t_{Mo} = \int_0^{Q^{Mo}} \mathcal{D}^{-1}(x)\mathrm{d}x}$

CS2 : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{D}^{-1}(Q)}{\mathrm{d}Q} - \dfrac{\mathrm{d}^2C(Q)}{\mathrm{d}Q^2} \overset{?}{<} 0$

http://pascal.favard.free.fr/

Analyse de la CN1

$Rm(Q^{Mo})$

$Cm(Q^{Mo})$

$$0 + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) = \frac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$$

– de recette

+ de recette : p^{Mo}

Analyse de la CN1

$Rm(Q^{Mo})$

$Cm(Q^{Mo})$

$$0 + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) = \frac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$$

– de recette

+ de recette : p^{Mo}

Analyse de la CN1

$Rm(Q^{Mo})$

$Cm(Q^{Mo})$

$$0 + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) = \frac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$$

– de recette

+ de recette : p^{Mo}

Analyse de la CN1

$Rm(Q^{Mo})$

$Cm(Q^{Mo})$

$$0 + \mathcal{D}^{-1}(Q^{Mo}) = \frac{\mathrm{d}C(Q^{Mo})}{\mathrm{d}Q}$$

– de recette

+ de recette : p^{Mo}

Figure 8 – Choix du monopole

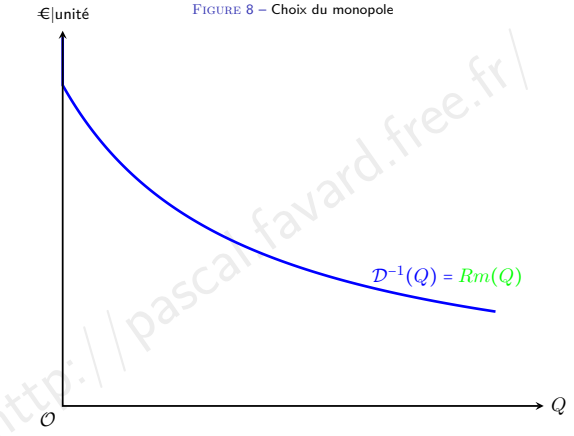


Figure 8 – Choix du monopole

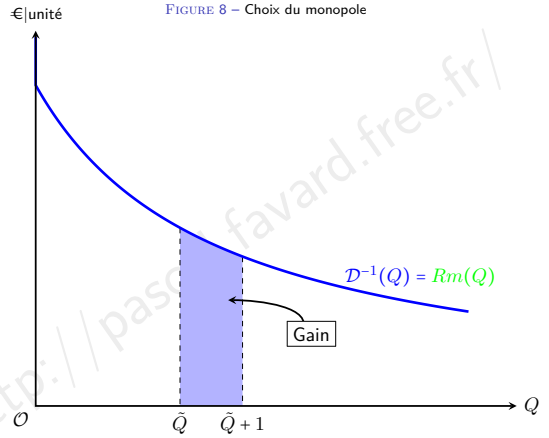


Figure 8 – Choix du monopole

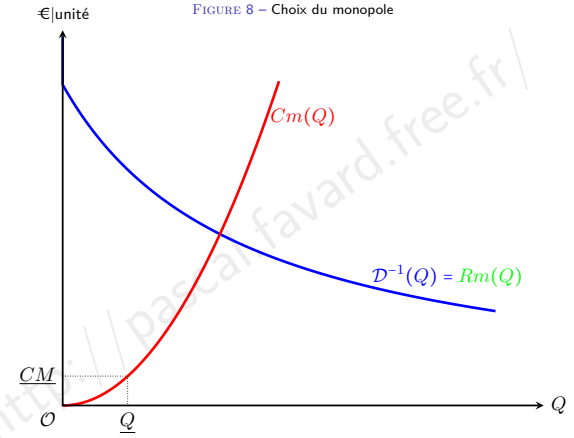
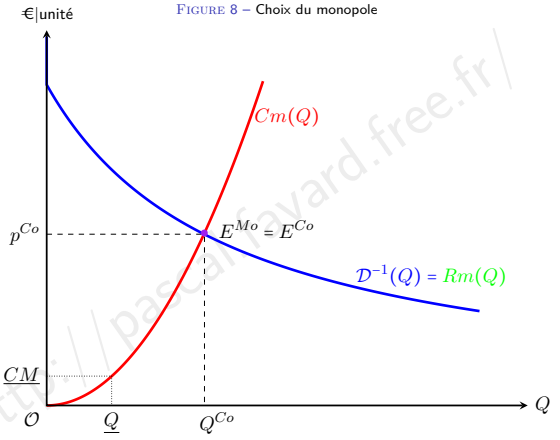


Figure 8 – Choix du monopole



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 8 – Choix du monopole

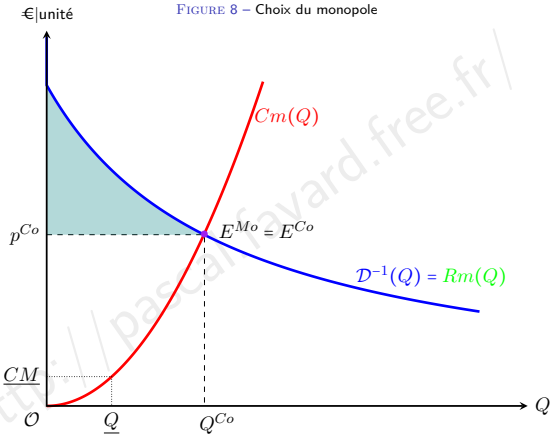
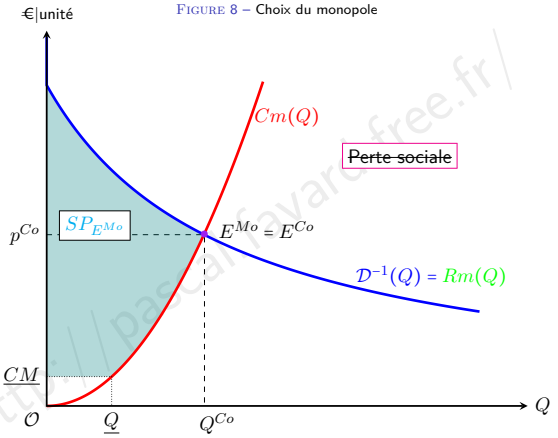


FIGURE 8 – Choix du monopole



3. Politique de prix non uniforme
3.1 La discrimination parfaite
3.2 La discrimination de degré 3
3.3 La discrimination de degré 2

Discrimination du troisième degré

Définition :

Le producteur observe un signal qui est « lié » aux préférences du consommateur et utilise ce signal pour discriminer par le prix.

Hypothèses

1. Deux groupes de consommateurs : $\mathcal{D}_a^{-1}(Q_a)$ et $\mathcal{D}_b^{-1}(Q_b)$
2. Fonction de coût du monopole $C(Q_a + Q_b)$
3. Le monopole ne peut pas discriminer à l'intérieur de chaque groupe : tarification linéaire

Programme du monopole : Deux « marchés »

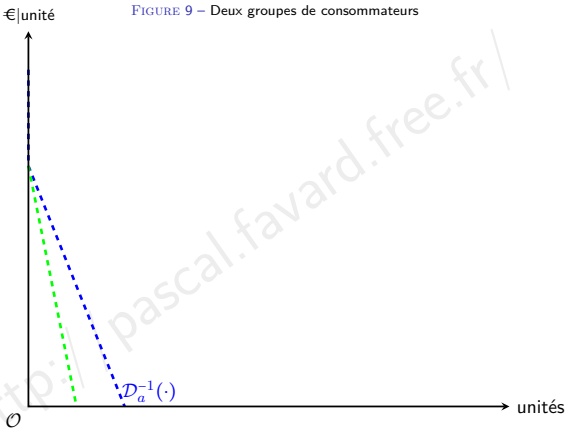
$$\mathscr{P}_{Monopole} \left| \begin{array}{l} \underset{\{p_a,p_b,Q_a,Q_b\}}{\text{Max}} \; p_a Q_a + p_b Q_b - C(Q_a + Q_b) \\ slc \begin{cases} \mathcal{D}_a^{-1}(Q_a) \geq p_a \\ \mathcal{D}_b^{-1}(Q_b) \geq p_b \end{cases} \end{array} \right. \tag{7}$$

CN1 :
$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{D}_a^{-1}(Q_a)}{dQ} Q_a + \mathcal{D}_a^{-1}(Q_a) - \dfrac{dC(Q_a+Q_b)}{dQ} = 0 \\ \dfrac{d\mathcal{D}_b^{-1}(Q_b)}{dQ} Q_b + \mathcal{D}_b^{-1}(Q_b) - \dfrac{dC(Q_a+Q_b)}{dQ} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{p_a - Cm(Q)}{p_a} = -\dfrac{d\mathcal{D}_a^{-1}(Q_a)}{dQ_a}\dfrac{Q_a}{p_a} = -\dfrac{1}{\dfrac{d\mathcal{D}_a(p_a)}{dp_a}\dfrac{p_a}{Q_a}} = -\dfrac{1}{\mathcal{E}^{\mathcal{D}_a}(p_a)} \\ \dfrac{p_b - Cm(Q)}{p_b} = -\dfrac{d\mathcal{D}_b^{-1}(Q_b)}{dQ_b}\dfrac{Q_b}{p_b} = -\dfrac{1}{\dfrac{d\mathcal{D}_b(p_b)}{dp_b}\dfrac{p_b}{Q_b}} = -\dfrac{1}{\mathcal{E}^{\mathcal{D}_b}(p_b)} \end{cases}$$

CS2 : Pensez-y !

FIGURE 9 – Deux groupes de consommateurs



http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 9 – Deux groupes de consommateurs

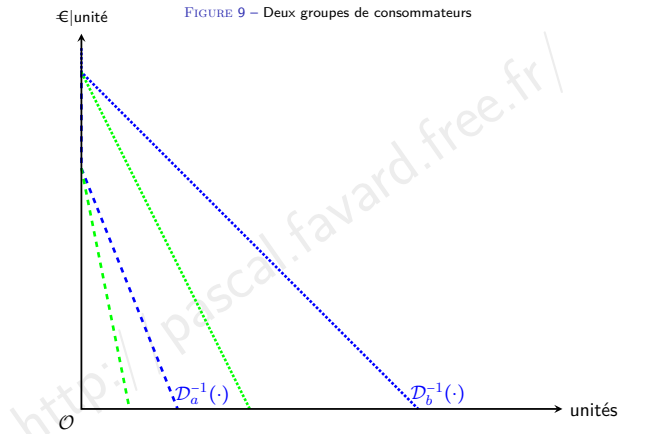


FIGURE 9 – Deux groupes de consommateurs

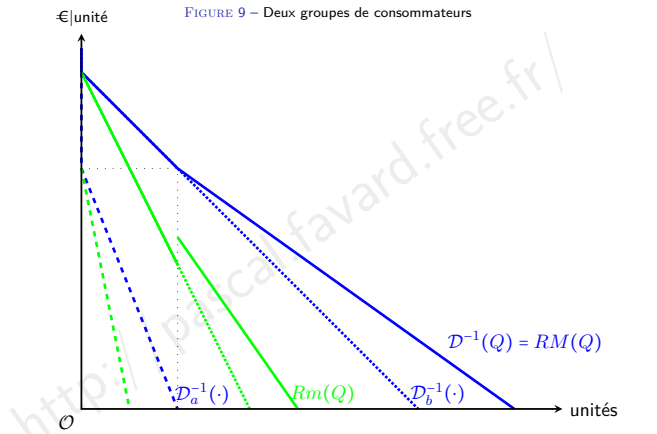


FIGURE 9 – Deux groupes de consommateurs

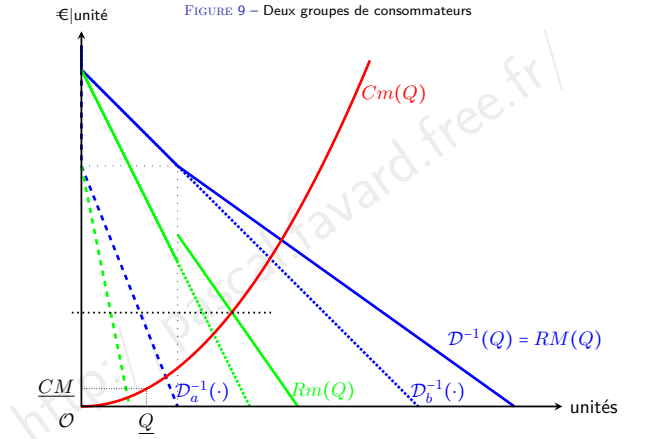


FIGURE 9 – Deux groupes de consommateurs

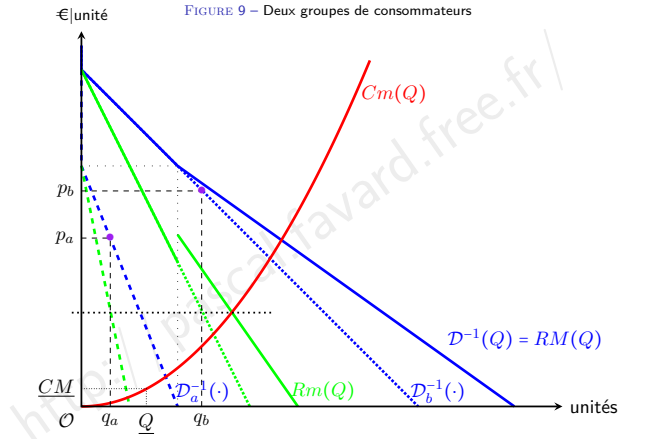
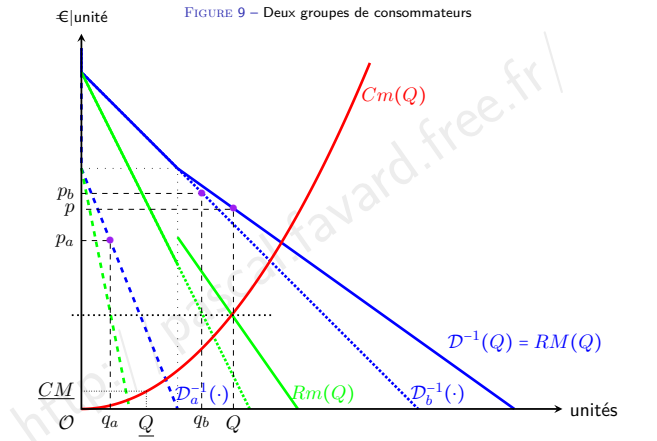


FIGURE 9 – Deux groupes de consommateurs



3. Politique de prix non uniforme
3.1 La discrimination parfaite
3.2 La discrimination de degré 3
3.3 La discrimination de degré 2

Discrimination du second degré

Définition :

Le producteur utilise des instruments d'autosélection (contrats) pour extraire imparfaitement le surplus, généré par la consommation du bien considéré, de chacun des consommateurs ou de chacun des groupes de consommateurs identiques.

Contraintes :

1. participatives
2. incitatives

Hypothèses

1. Deux groupes de consommateurs n_a et n_b
2. La dépense pour les autres biens est un bien composite, le numéraire.
3. Fonctions d'utilité quasi-concaves : $u_i(q_i, \mathcal{R}_i - T_i)$ avec $i = a, b$
4. Fonction de coût du monopole $C(n_a q_a + n_b q_b)$ convexe
5. $u_a(0, \mathcal{R}_a) = \underline{u_a}$ et $u_b(0, \mathcal{R}_b) = \underline{u_b}$
6. Le monopole a intérêt à servir les deux groupes.
7. $\forall (q, T) \neq (0, 0) : TmS_a(\cdot) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}q} < TmS_b(\cdot)$

http://pascal.favard.free.fr/

Programme du monopole avec deux groupes : n_a et n_b

$$\mathscr{P}_{Monopole}\left|\begin{array}{l}\underset{\{T_a,T_b,q_a,q_b\}}{\text{Max}}\ n_aT_a+n_bT_b-C(n_aq_a+n_bq_b)\\ slc\begin{cases}u_a(q_a,\mathcal{R}_a-T_a)\geq \underline{u_a}\\ u_b(q_b,\mathcal{R}_b-T_b)\geq \underline{u_b}\\ u_a(q_a,\mathcal{R}_a-T_a)\geq u_a(q_b,\mathcal{R}_a-T_b)\\ u_b(q_b,\mathcal{R}_b-T_b)\geq u_b(q_a,\mathcal{R}_b-T_a)\end{cases}\end{array}\right. \quad (8)$$

Cas particulier « Tarifs binômes » : $T_i(q_i) = A + pq_i$

$$\mathscr{P}_{Monopole}\left|\begin{array}{l}\underset{\{A,p,q_a,q_b\}}{\text{Max}}\ [n_a+n_b]A+p[n_aq_a+n_bq_b]-C(n_aq_a+n_bq_b)\\ slc\begin{cases}u_a(q_a,\mathcal{R}_a-A-pq_a)\geq \underline{u_a}\\ u_b(q_b,\mathcal{R}_b-A-pq_b)\geq \underline{u_b}\\ u_a(q_a,\mathcal{R}_a-A-pq_a)\geq u_a(q_b,\mathcal{R}_a-A-pq_b)\\ u_b(q_b,\mathcal{R}_b-A-pq_b)\geq u_b(q_a,\mathcal{R}_b-A-pq_a)\end{cases}\end{array}\right. \quad (9)$$

Figure 10 – Choix du monopole

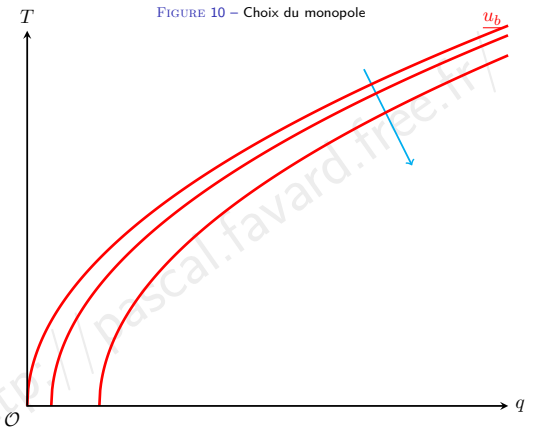


Figure 10 – Choix du monopole

Figure 10 – Choix du monopole

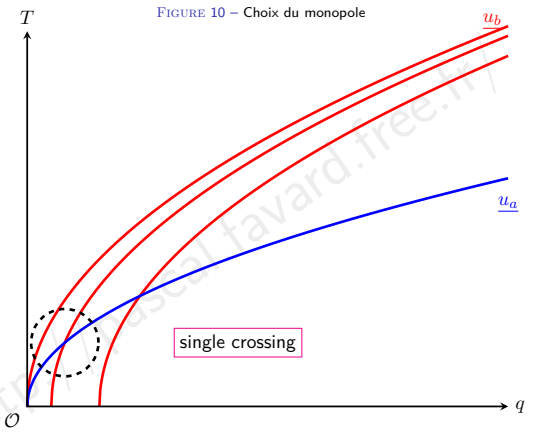


Figure 10 – Choix du monopole

Figure 10 – Choix du monopole

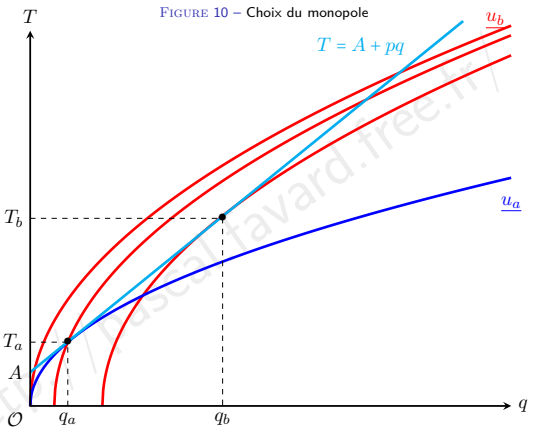


Figure 10 – Choix du monopole

http://pascal.favard.free.fr/

FIGURE 10 – Choix du monopole

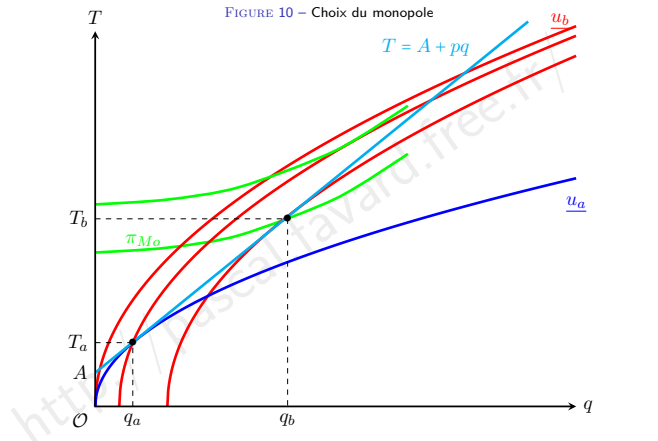


FIGURE 10 – Choix du monopole

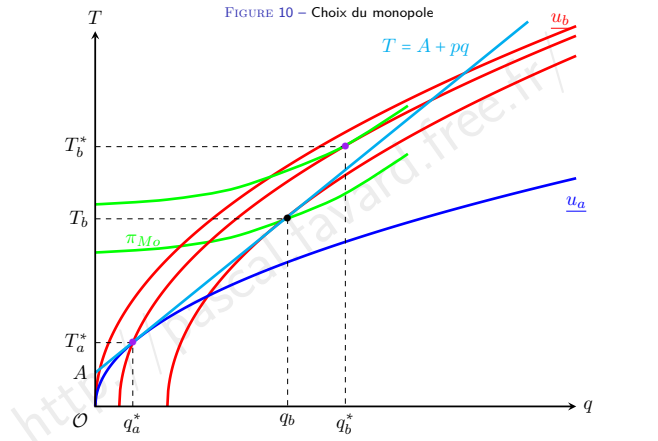


FIGURE 10 – Choix du monopole

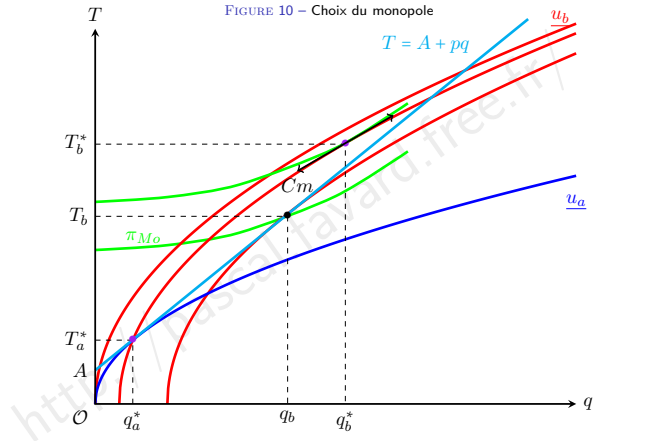


Table des matières (Diapo : 1)

1. Introduction

2. Équilibre sur un marché avec monopole
2.1 La demande agrégée
2.2 Les fonctions de recette
2.3 Détermination de l'équilibre de marché
2.4 Mesure du pouvoir de marché
2.5 Perte de Surplus Social
2.6 Deux groupes de consommateurs

3. Politique de prix non uniforme
3.1 La discrimination parfaite
3.2 La discrimination de degré 3
3.3 La discrimination de degré 2

Micro-économie

Pr. Pascal Favard

U.F.R. de droit, d'économie et des sciences sociales

11 septembre 2017

Université François-Rabelais Tours

Les chapitres : L2 & L3

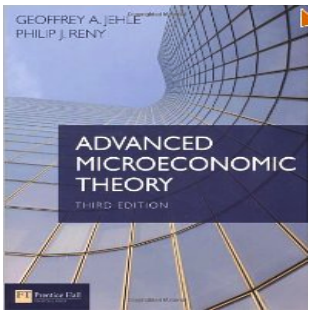
1. Consommateur
2. Demande & dualité
3. Producteur
4. Offre & dualité
5. Risque & dynamique
6. Équilibre partiel
7. Équilibre général
8. Monopole
9. Équilibre de Nash

Chapitre 9 :

« Équilibre de Nash »

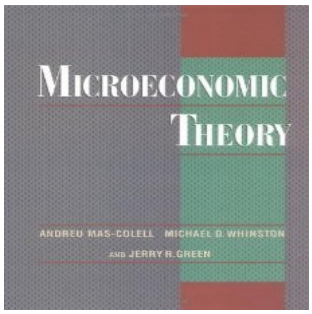
Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « A Primer in Game Theory » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds



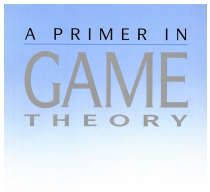
Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « A Primer in Game Theory » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds



Vive la lecture !

1. « Advanced Microeconomic Theory » G. A. Jehle and P. J. Reny, FT Prentice Hall Pearson
2. « Microeconomic Theory » by A. Mas-Colell, M. Whiston and J. Green, Oxford Eds
3. « A Primer in Game Theory » by Roberts Gibbons Harvester Wheatsheaf Eds



Robert Gibbons

Plan

1. Introduction
2. Jeux statiques
3. Jeux dynamiques

1. Introduction
2. Jeux statiques
3. Jeux dynamiques

http://pascal.favard.free.fr/

Contexte

Définition :

La théorie des jeux : étude des problèmes de décisions dans le cas d'interactions (économiques) stratégiques entre les agents

Contexte

Définition :

La théorie des jeux : étude des problèmes de décisions dans le cas d'interactions (économiques) stratégiques entre les agents

- Oligopole
- Marchandage
- Enchères
- Compétition entre pays

Jeux coopératifs Vs jeux non-coopératifs

Définition :

Un jeu coopératif est un jeu au cours duquel les joueurs peuvent prendre des engagements contraignants

Jeux coopératifs Vs jeux non-coopératifs

Définition :

Un jeu coopératif est un jeu au cours duquel les joueurs peuvent prendre des engagements contraignants

- Cartel
- Collusion
- Unions économiques

On se limitera aux jeux non-coopératifs

Information complète Vs information parfaite

Définition :

- Un jeu est en information complète si tous les joueurs connaissent parfaitement la structure du jeu.
- Un jeu est en information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs.

On se limitera aux jeux en information complète.

Quatre classes de jeux

- Jeux statiques en information complète
- ~~Jeux statiques en information incomplète~~
- Jeux dynamiques en information complète
- ~~Jeux dynamiques en information incomplète~~

Rationalité Vs rationalité limitée

Définition :

Un agent est rationnel s'il est conscient de toutes les alternatives qui s'offrent à lui, fait des anticipations sur les éléments inconnus, possède des préférences transitives et réflexives et choisit ses actions après un processus d'optimisation.

Quatre notions d'équilibres

- Équilibre de Nash
- Équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux
- ~~Équilibre de Nash bayésien~~
- ~~Équilibre (de Nash) bayésien parfait~~

http://pascal.favard.free.fr/

1. Introduction

2. Jeux statiques

3. Jeux dynamiques

Hypothèses

- Les joueurs (agents) jouent simultanément

⇒ Jeux statiques

- Les gains des joueurs dépendent de leurs actions
- Les joueurs sont en information complète

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
- Jeux sous forme normale
- Élimination itérative des stratégies strictement dominées
- Équilibre de Nash
- Appendices

2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre

Le dilemme du prisonnier

Deux suspects arrêtés pour vol sans preuve et mis en cellules séparées. La police dit à chacun :

- si aucun ne parle vous serez condamnés à un mois de prison pour outrage à agent,
- si vous parlez tous les deux vous serez condamnés à six mois de prison,
- si un seul parle, c'est la liberté pour lui et neuf mois de prison pour l'autre.

Stratégies et fonction de gain

- Chaque joueur a deux stratégies :
  - Parler (Bavard),
  - Se taire (Taiseux).
- Fonction de gain, dépend de la stratégie de l'autre :
  - L'autre ne parle pas alors soit :
    - je parle et je suis libéré 0,
    - je ne parle pas et j'en prends pour un mois -1.
  - L'autre parle alors soit :
    - je parle et j'en prends pour six mois -6,
    - je ne parle pas et j'en prends pour neuf mois -9.

Matrice des gains

J		Joueur 2	
	s	Taiseux	Bavard
Joueur 1	Taiseux	(-1,-1)	(-9,0)
	Bavard	(0,-9)	(-6,-6)

Table 1 – Dilemme du Prisonnier

Jeux à n-joueurs : stratégies et fonctions de gain

- Soit S_i ensemble des stratégies du joueur i
- Soit s_i une stratégie possible du joueur i avec $s_i \in S_i$

  ⇒ $(s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_{n-1}, s_n)$ est une combinaison de stratégies, une pour chaque joueur

- Soit U_i la fonction de gain du joueur i

  ⇒ $u_i(s_1, s_2, ..., s_i, ..., s_{n-1}, s_n)$ est le gain du joueur i s'il joue s_i et que les autres jouent $(s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$

http://pascal.favard.free.fr/

Jeu sous forme normale

Définition :

La représentation sous forme normale d'un jeu à n-joueurs spécifie les espaces de stratégies des joueurs $(S_1, S_2, ..., S_i, ..., S_{n-1}, S_n)$ et leurs fonctions de gain $(u_1, u_2, ..., u_i, ..., u_{n-1}, u_n)$. On notera G ce jeu :

$$G = \{S_1, ..., S_i, ..., S_n; u_1, ..., u_i, ..., u_n\}.$$

Jeu sous forme normale

Remarque :

Le fait que le jeu soit simultané n'implique pas que tous les joueurs jouent en même temps. Cela implique seulement que quand un joueur joue, il ne sait pas ce que les autres ont joué, s'ils l'ont déjà fait.

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
- Jeux sous forme normale
- Élimination itérative des stratégies strictement dominées
- Equilibre de Nash
- Appendices

2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre

Stratégie dominante

- Comment résoudre le dilemme du prisonnier ?
- Qui va en prison, pour combien de mois ?
- Si le joueur i se tait alors le joueur j a intérêt de parler car -1 < 0
- Si le joueur i parle alors le joueur j a intérêt de parler car -6 >-9
- Donc $\forall s_i$ le joueur j a intérêt de parler : parler est donc une stratégie dominante pour le joueur j

Stratégie strictement dominée

Définition :

Soit $G = \{S_1, ..., S_i, ..., S_n; u_1, ..., u_i, ..., u_n\}$ un jeu à n-joueurs sous forme normale. Prenons s_i' et s_i'' deux stratégies faisables (i.e. $\in S_i$). La stratégie s_i' est strictement dominée par la stratégie s_i'' pour chaque combinaison de stratégies des autres joueurs, si le gain à jouer s_i' est strictement plus petit que le gain à jouer s_i'' :

$$\forall (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n,$$

$$u_i(s_1, .., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, .., s_n) < u_i(s_1, .., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, .., s_n)$$

$\Rightarrow$ Un joueur rationnel éliminera les stratégies strictement dominées.

Stratégie faiblement dominée

Définition :

Soit $G = \{S_1, ..., S_i, ..., S_n; u_1, ..., u_i, ..., u_n\}$ un jeu à n-joueurs sous forme normale. Prenons s_i' et s_i'' deux stratégies faisables (i.e. $\in S_i$). La stratégie s_i' est faiblement dominée par la stratégie s_i'' pour chaque combinaison de stratégies des autres joueurs, si :

$$\forall (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n,$$

$$u_i(s_1, .., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, .., s_n) \leq u_i(s_1, .., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, .., s_n) \text{ et}$$

$$\exists (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n, \text{ tel que}$$

$$u_i(s_1, .., s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, .., s_n) < u_i(s_1, .., s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, .., s_n)$$

Exemple d'élimination itérative (Diapo : 1)

J	Joueur 2			
Joueur 1	s	Gauche	Centre	Droite
	Haut	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	Bas	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Table 2 – Jeu abstrait : Mouvement

Exemple d'élimination itérative (Diapo : 2)

J	Joueur 2			
Joueur 1	s	Gauche	Centre	Droite
	Haut	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	Bas	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Table 3 – Jeu abstrait : Mouvement

$\Rightarrow$ La stratégie Droite est strictement dominée (par la stratégie Centre) pour le joueur 2

http://pascal.favard.free.fr/

Exemple d'élimination itérative (Diapo : 3)

J	Joueur 2	
	s	Gauche	Centre
Joueur 1	Haut	(1,0)	(1,2)
	Bas	(0,3)	(0,1)

Table 4 – Jeu abstrait : Mouvement

Exemple d'élimination itérative (Diapo : 4)

J	Joueur 2	
	s	Gauche	Centre
Joueur 1	Haut	(1,0)	(1,2)
	Bas	(0,3)	(0,1)

Table 5 – Jeu abstrait : Mouvement

⇒ La stratégie Bas est strictement dominée pour le joueur 1 conditionnellement à l'élimination de la stratégie Droite du joueur 2

Exemple d'élimination itérative (Diapo : 5)

J	Joueur 2	
	s	Gauche	Centre
Joueur 1	Haut	(1,0)	(1,2)

Table 6 – Jeu abstrait : Mouvement

⇒ Gauche est strictement dominée pour le joueur 2 conditionnellement à l'élimination de la stratégie Bas du joueur 1 qui elle même a été éliminée conditionnellement à l'élimination de la stratégie Droite du joueur 2

Exemple d'élimination itérative (Diapo : 6)

J	Joueur 2
	s	Centre
Joueur 1	Haut	(1,2)

Table 7 – Jeu abstrait : Mouvement

Common Knowledge

Cette procédure itérative suppose que :

1. Tous les joueurs sont rationnels (déjà dit)
2. Tous les joueurs savent que tous les joueurs sont rationnels
3. Tous les joueurs savent que tous les joueurs savent que tous les joueurs sont rationnels
4. Ceci ad infinitum
5. Voir Aumann [1976] pour une définition formelle du common knowledge

Élimination itérative impossible

J	Joueur 2		
	s	Gauche	Centre	Droite
Joueur 1	Haut	(0,4)	(4,0)	(5,3)
	Milieu	(4,0)	(0,4)	(5,3)
	Bas	(3,5)	(3,5)	(6,6)

Table 8 – Jeu abstrait : Mouvement

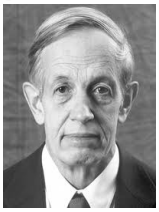
⇒ Il n'y a pas de stratégie strictement dominée pour les joueurs ! Que faire dans ce cas ?

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
- Jeux sous forme normale
- Élimination itérative des stratégies strictement dominées
- Équilibre de Nash
- Appendices

2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre

John Nash

- John Nash (1928-2015) prix Nobel d'économie en 1994 (Selten, Harsanyi)
- Film de Ron Howard en 2001 « Un homme d'exception »



http://pascal.favard.free.fr/

Intérêt

Supposons que le théoricien des jeux, pour un jeu donné, « prédise » une solution.

- Cette prédiction sera juste si chaque joueur souhaite choisir la solution prédite
- S'il le fait c'est que c'est sa meilleure réponse aux stratégies prédites pour les autres joueurs
- On dira que cette prédiction est strategically stable et self-enforcing puisqu'aucun joueur ne souhaitera dévier de la stratégie que la théorie a prédite.
- On appelle cette « prédiction » un équilibre de Nash

Équilibre de Nash

Définition :

Dans un jeu sous forme normale à n-joueurs $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, les stratégies $(s_1^*, ..., s_n^*)$ sont un équilibre de Nash si pour chaque joueur i, s_i^* est la meilleure réponse aux stratégies données pour les $n-1$ autres joueurs, $(s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*)$:

$$\forall s_i \in S_i \; ; u_i(s_1^*, .., s_i^*, .., s_n^*) \geq u_i(s_1^*, .., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, .., s_n^*)$$

Donc s_i^* est solution de :

$$\mathscr{P}_i \left| \; \underset{\{s_i \in S_i\}}{\text{Max}} \; u_i(s_1^*, .., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, .., s_n^*) \right. \qquad (1)$$

Existence

- **EN** est un concept plus fort que l'élimination des stratégies strictement dominées
- N'est-il pas trop fort, existe t'il toujours un EN ?
- Nash [1950] a montré qu'il existe au moins EN dans chaque jeu fini (i.e. espace des stratégies et des joueurs finis)
- Attention ne pas confondre existence et unicité !

Élimination itérative et EN

J		Joueur 2		
	s	Gauche	Centre	Droite
Joueur 1	Haut	(0,4)	(4,0)	(5,3)
	Milieu	(4,0)	(0,4)	(5,3)
	Bas	(3,5)	(3,5)	(6,6)

Table 9 – Jeu abstrait : Mouvement

⇒ Il n'y a pas de stratégie strictement dominée pour les joueurs. Mais il y a un **EN** !

La guerre des sexes

- Edith et Marcel veulent passer une soirée ensemble
- Ils préfèrent être ensemble que séparés
- Edith veut aller au concert et Marcel à un combat de boxe

J		Edith	
	s	Concert	Boxe
Marcel	Concert	(1,2)	(0,0)
	Boxe	(0,0)	(2,1)

- Combien d'EN ? Deux !

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
- Jeux sous forme normale
- Élimination itérative des stratégies strictement dominées
- Équilibre de Nash
- Appendices
2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre

Propositions

Proposition A :

Dans un jeu sous forme normale à n-joueurs $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ si l'élimination par itérations des stratégies strictement dominées nous donne une solution unique $(s_1^*, ..., s_n^*)$ alors cette solution est l'unique **EN** du jeu.

Propositions

Proposition A :

Dans un jeu sous forme normale à n-joueurs $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ si l'élimination par itérations des stratégies strictement dominées nous donne une solution unique $(s_1^*, ..., s_n^*)$ alors cette solution est l'unique **EN** du jeu.

Proposition B :

Dans un jeu sous forme normale à n-joueurs $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$ si les stratégies $(s_1^*, ..., s_n^*)$ sont un EN alors elles survivront au processus d'élimination par itérations des stratégies strictement dominées .

http://pascal.favard.free.fr/

Preuve B : Raisonnons par l'absurde

- Partons de l'EN, supposons que dans cet ensemble de stratégies, s_i^* soit la première éliminée (après d'autres $\notin$EN).
- $\exists$ alors s_i'' non encore éliminée telle que :

$$u_i(s_1, .., s_i^*, .., s_n) < u_i(s_1, .., s_i'', .., s_n),$$

$\forall (s_1, .., s_{i-1}, s_{i+1}, .., s_n)$ ensemble des stratégies S_{-i} non encore éliminées.

- Contradiction puisque s_i^* est la meilleure réponse à :

$$(s_1^*, .., s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, .., s_n^*).$$

- Donc $\nexists\ s_i''$. Q.E.D.

Preuve A

- De la proposition B on sait que tous EN ont survécu au processus d'élimination. Il reste donc à prouver qu'il ne reste qu'un EN. G est supposé être un jeu fini.
- Raisonnons par l'absurde.
- Supposons que le processus élimine toutes les stratégies sauf $(s_1^*, ..., s_n^*)$ mais que ces stratégies ne soient pas un EN. $\exists$ alors un joueur i et une stratégie s_i' faisable (i.e. $\in S_i$) telle que :

$$u_i(s_1^*, .., s_{i-1}^*, s_i', s_{i+1}^*, .., s_n^*) > u_i(s_1^*, ..., s_n^*).$$

- De deux choses l'une, soit $s_i' = s_i^*$ et on a une contradiction, soit $s_i' \neq s_i^*$ et alors $\exists\ s_i''$ qui domine s_i' et on recommence jusqu'à $s_i''''''' = s_i^*$ et on a alors une contradiction. Q.E.D.

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre
- Stratégies mixtes
- Équilibre de Nash : Existence

« Matching pennies »

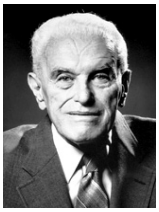
- Casimir et Sidonie ont un euro, ils choisissent simultanément de montrer pile ou face
- Si les choix sont identiques Sidonie gagne l'euro de Casimir, sinon c'est Casimir qui gagne l'euro de Sidonie

J		Sidonie	
	s	Face	Pile
Casimir	Face	$(-1,\underline{1})$	$(\underline{1},-1)$
	Pile	$(\underline{1},-1)$	$(-1,\underline{1})$

- Combien d'EN ! Aucun en stratégie pure mais en stratégies mixtes ?

Stratégies mixtes

- Le problème c'est qu'il y a incertitude sur ce que va jouer l'autre
- Il faut donc introduire une nouvelle notion : stratégies mixtes
- Jusqu'à présent : stratégies pures
- Introduit en [1973] par John Charles Harsanyi (1920-2000) : Une stratégie mixte pour le joueur i c'est une distribution de probabilité sur l'ensemble de ses stratégies ou sur un sous-ensemble de celles-ci



Stratégies mixtes

- Dans notre jeu S_i contient deux stratégies pures : Pile ou Face
- Un stratégie mixte pour le joueur i c'est la distribution de probabilité $(q_i, 1 - q_i)$
- q_i est la probabilité de jouer Face et $1 - q_i$ celle de jouer Pile, avec $0 \leq q_i \leq 1$
- La stratégie mixte $(0, 1)$, i.e. $q_i = 0$, c'est la stratégie pure Pile

Stratégies mixtes

Définition :

Dans un jeu sous forme normale à n-joueurs $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, supposons que le joueur i ait K stratégies pures : $S_i = \{s_{i1}, ..., s_{iK}\}$. Une stratégie mixte pour le joueur i c'est une distribution de probabilité $q_i = (q_{i1}, ..., q_{iK})$, où $0 \leq q_{ik} \leq 1$ et $k = 1, ..., K$, $q_{i1} + ... + q_{iK} = 1$.

http://pascal.favard.free.fr/

Jeu de mouvement

J		Joueur 2	
	s	Gauche	Droite
Joueur 1	Haut	$(3,-)$	$(0,-)$
	Milieu	$(0,-)$	$(3,-)$
	Bas	$(1,-)$	$(1,-)$

Table 10 – Jeu abstrait : Mouvement

- Si le joueur 1 choisit $q_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ alors $\mathbb{E}(gains) = \frac{1}{2}\times 3 + \frac{1}{2}\times 0 + 0\times 1 = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 3 + 0\times 1 = \frac{3}{2} > 1$ ceci $\perp\!\!\!\perp$ du jeu de l'autre joueur
- La stratégie pure Bas est donc dominée par la stratégie mixte q_1.

Jeu de mouvement : autre cas

J		Joueur 2	
	s	Gauche	Droite
Joueur 1	Haut	$(3,-)$	$(0,-)$
	Milieu	$(0,-)$	$(3,-)$
	Bas	$(2,-)$	$(2,-)$

Table 11 – Jeu abstrait : Mouvement

- Dans ce cas la stratégie pure Bas ne domine pas les autres stratégies pures. En revanche elle domine la stratégie q_1 précédente puisque : $\frac{3}{2} < 2$

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre
- Stratégies mixtes
- Équilibre de Nash : Existence

Généralisation avec stratégies mixtes

- Un stratégie pure est en fait une stratégie mixte
- Il suffit de mettre une proba nulle sur toutes les autres stratégies
- Il faut donc généraliser les fonctions de meilleure réponse
- Meilleure réponse du joueur i à une stratégie mixte du joueur j
- En fait la stratégie mixte de j représente l'incertitude de i sur le jeu de j

Exemple : Matching pennies

J		Sidonie	
	s	Face	Pile
Casimir	Face	$(-1,1)$	$(1,-1)$
	Pile	$(1,-1)$	$(-1,1)$

- Casimir suppose que Sidonie joue Face avec une proba q_s et Pile avec $1-q_s$:

$\mathbb{E}_c(gains) = q_s \times (-1) + (1-q_s)\times 1 = 1 - 2q_s$ sachant qu'il joue Face

$\mathbb{E}_c(gains) = q_s \times 1 + (1-q_s)\times(-1) = 2q_s - 1$ sachant qu'il joue Pile

donc $1 - 2q_s > 2q_s - 1 \Leftrightarrow q_s < \frac{1}{2}$

- Casimir a intérêt de jouer Face (Pile) ssi $q_s < \frac{1}{2}$ ($q_s > \frac{1}{2}$). Si $q_S = \frac{1}{2}$ Casimir est indifférent entre Pile ou Face

Généralisation avec stratégies mixtes

- Mais Casimir lui aussi peut jouer en stratégies mixtes, soit $(q_c, 1-q_c)$ avec q_c probabilité de jouer Face :

$\mathbb{E}_c = q_c[q_s \times (-1) + (1-q_s)\times 1] + (1-q_c)[q_s \times 1 + (1-q_s)\times(-1)]$
sachant qu'il joue $(q_c, 1-q_c)$ et Sidonie $(q_s, 1-q_s)$

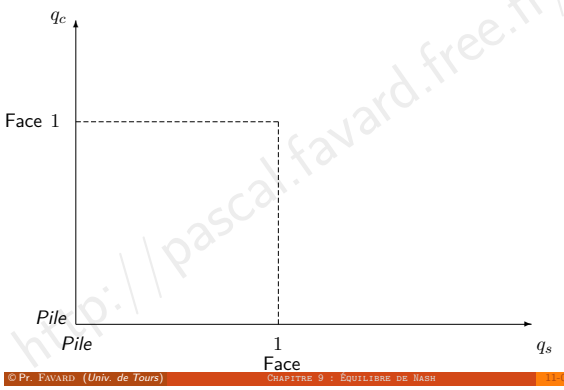
$\Rightarrow$ $\mathbb{E}_c = q_c q_s \times (-1) + q_c(1-q_s)\times 1 + (1-q_c)q_s \times 1 + (1-q_c)(1-q_s)\times(-1)$
où $q_c q_s$ est la proba que les deux jouent Face, etc.

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}_c = (2q_s - 1) + q_c(2 - 4q_s)$

- $\mathbb{E}_c$ est $\uparrow$ en q_c : si $(2-4q_s) > 0 \Leftrightarrow q_s < \frac{1}{2}$. Casimir choisit q_c le plus grand possible (i.e. $q_c = 1$ soit Face)
- $\mathbb{E}_c$ est $\downarrow$ en q_c : si $(2-4q_s) < 0 \Leftrightarrow q_s > \frac{1}{2}$. Casimir choisit q_c le plus petit possible (i.e. $q_c = 0$ soit Pile)

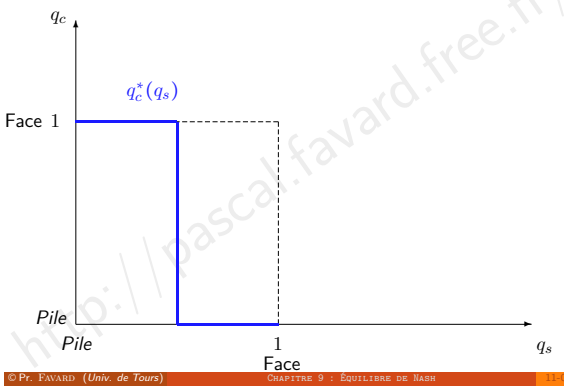
Traçons $q_c^*(q_s)$

Figure 1 – Meilleure réponse : stratégie mixte



Traçons $q_c^*(q_s)$

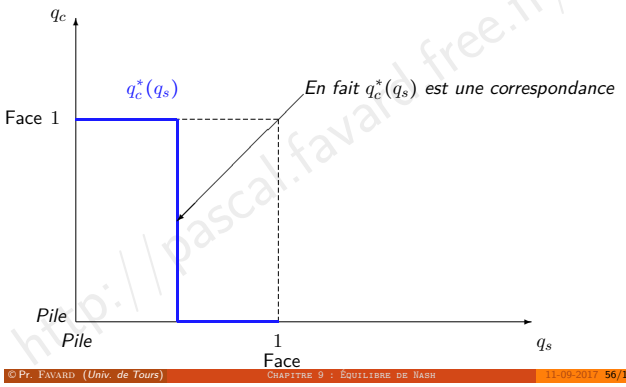
Figure 1 – Meilleure réponse : stratégie mixte



http://pascal.favard.free.fr/

Traçons $q_c^*(q_s)$

FIGURE 1 – Meilleure réponse : stratégie mixte



Cas général avec deux joueurs

- J (resp. K) le nombre de stratégies pures dans S_1 (resp. S_2)
- $S_1 = \{s_{11}, .., s_{1j}, .., s_{1J}\}$ et $S_2 = \{s_{21}, .., s_{2k}, .., s_{2K}\}$
- Si le joueur 1 croit que le joueur 2 jouera $(s_{21}, .., s_{2k}, .., s_{2K})$ avec les probabilités $(p_{21}, .., p_{2k}, .., p_{2K})$ alors son espérance de gain en jouant sa stratégie pure s_{1j} est :

$$\mathbb{E}_1 = \sum_{k=1}^{K} p_{2k}\ u_1(s_{1j}, s_{2k})$$

- et en jouant en la stratégie mixte $p_1 = (p_{11}, .., p_{1j}, .., p_{1J})$, on a :

$$\mathbb{E}_1(p_1, p_2) = \sum_{j=1}^{J} p_{1j} \left[\sum_{k=1}^{K} p_{2k}\ u_1(s_{1j}, s_{2k}) \right] = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} p_{1j}\ p_{2k}\ u_1(s_{1j}, s_{2k})$$

Généralisation avec stratégies mixtes

Si le joueur 2 croit que le joueur 1 jouera $(s_{11}, .., s_{1j}, .., s_{1J})$ avec les probabilités $(p_{11}, .., p_{1j}, .., p_{1J})$ alors son espérance de gain en jouant la stratégie mixte $p_2 = (p_{21}, .., p_{2k}, .., p_{2K})$, est :

$$\mathbb{E}_2(p_1, p_2) = \sum_{k=1}^{K} p_{2k} \left[\sum_{j=1}^{J} p_{1j}\ u_1(s_{1j}, s_{2k}) \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} p_{1j}\ p_{2k}\ u_2(s_{1j}, s_{2k})$$

Équilibre de Nash

Définition :

Dans un jeu sous forme normale à deux joueurs $G = \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$ les stratégies mixtes (p_1^*, p_2^*) sont un équilibre de Nash si pour chaque joueur sa stratégie mixte est la meilleure réponse à la stratégie mixte de l'autre joueur :

$$\mathbb{E}_1(p_1^*, p_2^*) \geq \mathbb{E}_1(p_1, p_2^*)\ \forall p_1$$

$$\mathbb{E}_2(p_1^*, p_2^*) \geq \mathbb{E}_2(p_1^*, p_2)\ \forall p_2$$

FIGURE 2 – Matching Pennies : EN en stratégies mixtes

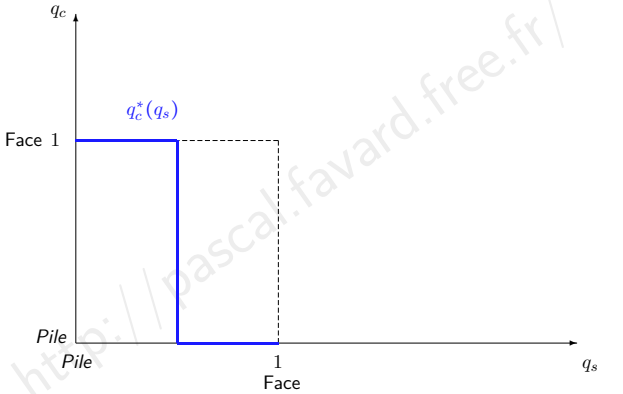


FIGURE 2 – Matching Pennies : EN en stratégies mixtes

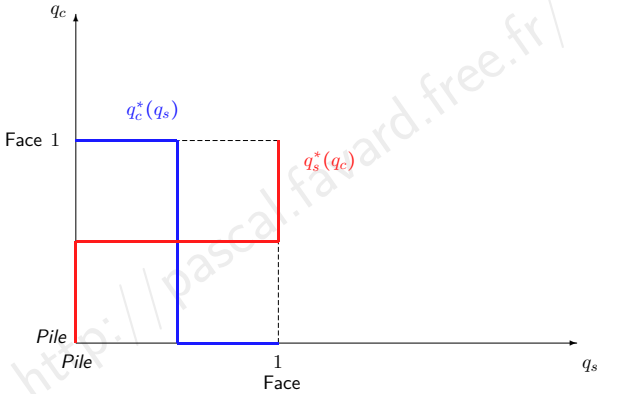
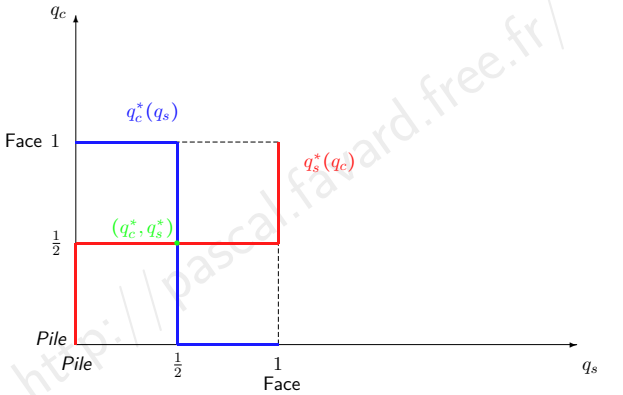


FIGURE 2 – Matching Pennies : EN en stratégies mixtes



Interprétation des stratégies mixtes

- IL ne faut pas penser que les joueurs jouent aléatoirement
- La stratégie mixte de Sidonie est en fait la caractérisation de l'incertitude de Casimir sur les choix de Sidonie d'une des deux stratégies (pures)
- Prenons l'exemple du penalty. Le tireur peut tirer à droite ou à gauche et le goal peut plonger à droite ou à gauche. Mais il doit anticiper sinon il est en retard.
- Le goal sait que le tireur va faire son choix par rapport son état physique, ses qualités etc. Mais il ne les observe pas. Sa seule possibilité c'est de considérer qu'il va tirer à droite une fois sur deux.
- S'il a de l'info, le tireur n'a pas de pied gauche, alors on n'est plus dans le même cas.

http://pascal.favard.free.fr/

La guerre des sexes

- Edith et Marcel veulent passer une soirée ensemble

J		Edith	
	s	Concert	Boxe
Marcel	Concert	(1,2)	(0,0)
	Boxe	(0,0)	(2,1)

- Deux **EN** en stratégies pures. Combien en stratégies mixtes ?

Guerre des sexes avec stratégies mixtes

- Marcel joue Concert (Boxe) avec une proba q_m $(1 - q_m)$
- Edith joue Concert (Boxe) avec une proba q_e $(1 - q_e)$
- $\mathbb{E}_m(Concert/(q_e, (1 - q_e)) = q_e \times 1 + (1 - q_e) \times 0 = q_e$
- $\mathbb{E}_m(Boxe/(q_e, (1 - q_e)) = q_e \times 0 + (1 - q_e) \times 2 = 2 - 2q_e$
- $\mathbb{E}_m(Concert/(q_e, (1 - q_e)) > \mathbb{E}_m(Boxe/(q_e, (1 - q_e))$

$\Leftrightarrow$ $q_e > 2 - 2q_e \Leftrightarrow q_e > \frac{2}{3}$

Guerre des sexes avec stratégies mixtes

Donc pour Marcel :

Concert $\succ$ Boxe si $q_e > \frac{2}{3} \Rightarrow q_m^*(q_e) = 1$
Concert $\prec$ Boxe si $q_e < \frac{2}{3} \Rightarrow q_m^*(q_e) = 0$
Concert $\approx$ Boxe si $q_e = \frac{2}{3} \Rightarrow q_m^*(q_e) \in]0, 1[$

De façon similaire, pour Edith :

Concert $\succ$ Boxe si $q_m > \frac{1}{3} \Rightarrow q_e^*(q_m) = 1$
Concert $\prec$ Boxe si $q_m < \frac{1}{3} \Rightarrow q_e^*(q_m) = 0$
Concert $\approx$ Boxe si $q_m = \frac{1}{3} \Rightarrow q_e^*(q_m) \in]0, 1[$

Figure 3 – Guerre des Sexes : **EN** en stratégies mixtes

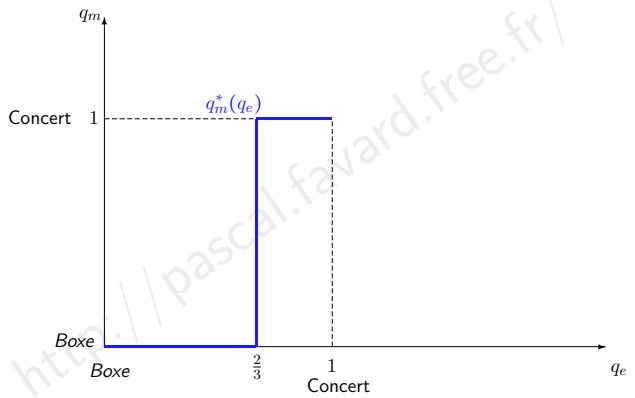


Figure 3 – Guerre des Sexes : **EN** en stratégies mixtes

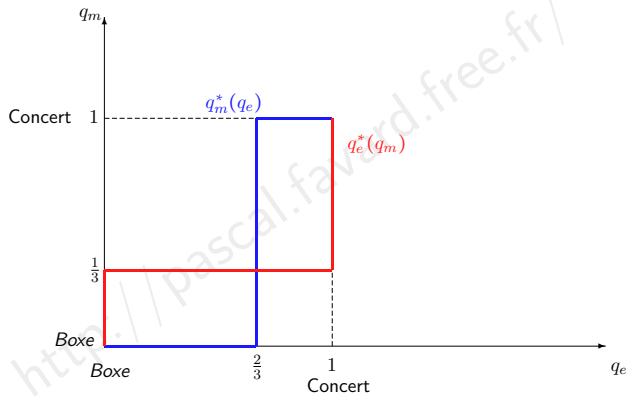


Figure 3 – Guerre des Sexes : **EN** en stratégies mixtes

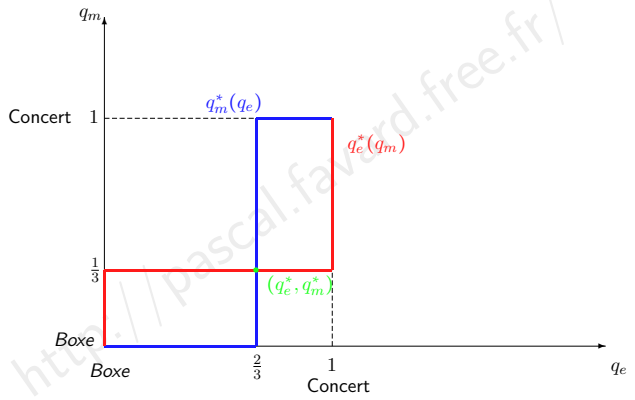
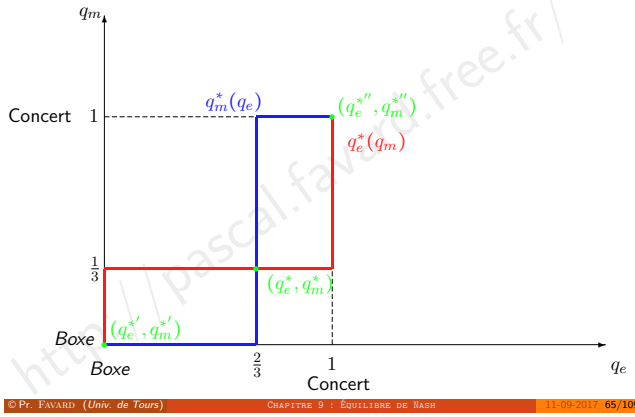


Figure 3 – Guerre des Sexes : **EN** en stratégies mixtes



Existence d'un équilibre de Nash

Théorème (Nash 1950) :

Dans un jeu sous forme normale à n-joueurs $G = \{S_1, ..., S_n; u_1, ..., u_n\}$, si n est fini et S_i est fini pour chaque i alors il existe au moins un équilibre de Nash, pas forcément en stratégies pures.

http://pascal.favard.free.fr/

Idée de la démonstration

Théorème du point fixe Brouwer (1912) et Kakutani (1941) :

Soit f une fonction continue de $[0,1] \to [0,1]$. Il existe au moins un point fixe, donc il existe au moins une valeur $x^* \in [0,1]$ telle que $f(x^*) = x^*$.

- Il faut donc montrer que le point fixe d'une certaine correspondance est un équilibre de Nash, et qu'il existe au moins un de ces points fixes.
- Cas à trois joueurs : on construit $p_1^*(p_2,p_3)$, $p_2^*(p_1,p_3)$, $p_3^*(p_1,p_2)$. Ensuite on construit le produit croisé de ces trois correspondances pour obtenir la correspondance $f(p_1,p_2,p_3)$
- Cette correspondance a au moins un point fixe (Brouwer) $[f(p_1,p_2,p_3) = (p_1,p_2,p_3)]$ appelons (p_1^*,p_2^*,p_3^*) ce point.
- Donc pour le joueur 1 $(2,3)$ p_1^* (p_2^*,p_3^*) est une meilleure réponse à (p_2^*,p_3^*) $((p_1^*,p_3^*),(p_1^*,p_2^*))$. Ce qui est la définition de l'équilibre de Nash.

Idée de la démonstration

- Donc s'il existe un point fixe c'est un équilibre de Nash
- Montrons qu'il y a toujours au moins un point fixe
- Il ne faut donc pas de discontinuité, ce qui est le cas puisque f est le produit croisé de correspondances (les meilleures réponses qui sont continues)

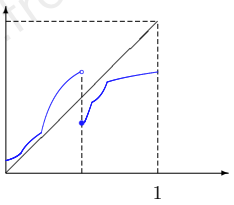


Figure 4 – Discontinuité

Stratégie pure strictement dominée

Lemme :

Une stratégie pure strictement dominée aura une probabilité, affectée, nulle dans une stratégie mixte.

1. Introduction

2. Jeux statiques

3. Jeux dynamiques

Hypothèses

- Les joueurs (agents) ne jouent pas simultanément

⇒ Jeux séquentiels ou dynamiques

- Les gains des joueurs dépendent de leurs actions
- Les joueurs sont en information complète

3. Jeux dynamiques
3.1 Définitions
3.2 Équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux
3.3 Détermination des EPSJ : Rétroduction
3.4 Paradoxes de la rétroduction

Résumons !

Un Jeu dynamique en information complète et parfaite a les trois propriétés suivantes :

(i) Les actions sont séquentielles

(ii) Les actions faites dans le passé sont connues de tous lorsqu'ils vont jouer

(iii) Les gains sont « common knowledge »

Jeu sous forme extensive

Définition :

Un jeu sous forme extensive est donné par un arbre de jeu contenant un nœud initial, des nœuds de décisions, des nœuds terminaux avec les gains associés et des branches reliant chacun de ces nœuds à ceux qui lui succèdent.

http://pascal.favard.free.fr/

Ensemble d'information

Définition :

A chaque étape d'un jeu sous forme extensive, on appelle un ensemble d'information (h_i) la collection de tous les nœuds que le joueur qui doit jouer à l'étape i ne peut distinguer compte tenu de l'information dont il dispose à cette étape du jeu. Chaque nœud contenu dans h_i contient exactement le même ensemble d'actions localement disponibles.

Information parfaite ou imparfaite ?

Définition :

Un jeu sous forme extensive est :

1. un jeu avec information imparfaite si au moins un ensemble d'information contient plus d'un nœud,
2. un jeu avec information parfaite si chaque ensemble d'information se réduit à un seul nœud.

Stratégies et actions

Définition :

Dans un jeu en information imparfaite, chaque stratégie d'un joueur doit préciser une action à choisir pour chacun de ses ensembles d'information.

Taiseux Vs Bavard : Jeu sous forme normale

J	Joueur 2	
	s	Taiseux	Bavard
Joueur 1	Taiseux	(-1,-1)	(-9,0)
	Bavard	(0,-9)	(-6,-6)

Table 12 – Matrice de gains : Dilemme du Prisonnier

Taiseux Vs Bavard : Jeu sous forme extensive

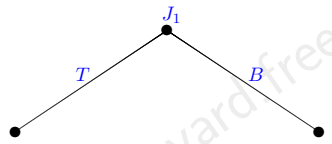


Figure 5 – Arbre de jeu : Dilemme du Prisonnier

Taiseux Vs Bavard : Jeu sous forme extensive

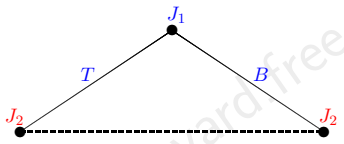


Figure 5 – Arbre de jeu : Dilemme du Prisonnier

Taiseux Vs Bavard : Jeu sous forme extensive

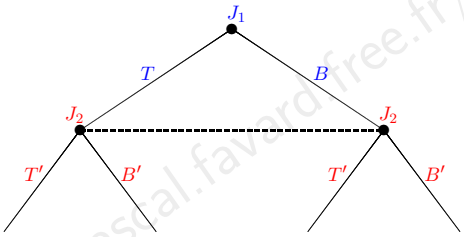


Figure 5 – Arbre de jeu : Dilemme du Prisonnier

Taiseux Vs Bavard : Jeu sous forme extensive

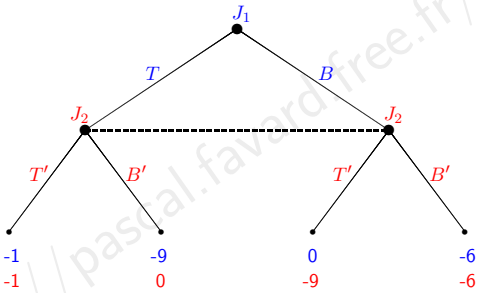


Figure 5 – Arbre de jeu : Dilemme du Prisonnier

http://pascal.favard.free.fr/

Entrant Vs Historique I

Soit un jeu avec un entrant potentiel (E) et un firme historique (H) sur un marché avec un bien homogène. Au début du jeu, E doit décider s'il installe une capacité de production (IC) donc de produire ou pas et H observe sa décision. Si E n'investit pas, alors le jeu est fini, son profit est nul sur ce marché et celui de H est égal à 100. H peut ensuite choisir d'augmenter sa capacité de production (AC) ou pas. (Voir gains ci-après)

Forme extensive

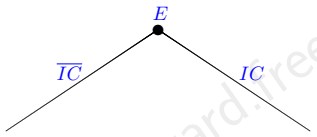


Figure 6 – Entrant Vs Historique I : Forme extensive

Forme extensive

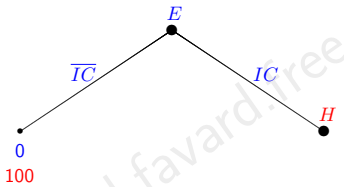


Figure 6 – Entrant Vs Historique I : Forme extensive

Forme extensive

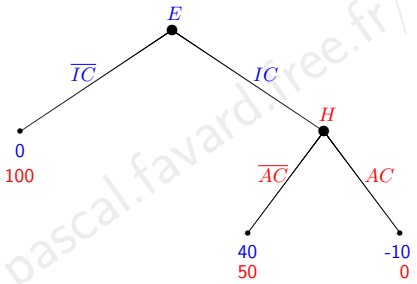


Figure 6 – Entrant Vs Historique I : Forme extensive

Forme normale

J		H	
	s	$\overline{AC}$	AC
E	IC	(40,50)	(-10,0)
	$\overline{IC}$	(0,100)	(0,100)

Table 13 – Entrant Vs Historique I : Forme normale

$$EN_{\mathcal{SP}} = \{(IC, \overline{AC}); (\overline{IC}, AC)\}$$

Faiblesses de l'équilibre de Nash

- Reconsidérons le jeu Entrant Vs Historique I : il y a 2 équilibres de Nash en stratégies pures : $EN_{\mathcal{SP}} = \{(IC, \overline{AC}); (\overline{IC}, AC)\}$
- L'équilibre de Nash $(\overline{IC}, AC)$ est basé sur la menace que l'entrée sera combattue, si elle a lieu.
- Mais finalement, cette menace ne sera jamais exécutée puisqu'il n'y a pas entrée à l'équilibre. Pire encore, si l'entrant décidait d'entrer H n'aurait pas intérêt à le combattre $(50 > 0)$!
- Dans ce cas on dira que la menace est non-crédible.
- L'existence de telles menaces qui soutiennent certains équilibres de Nash, affaiblit le concept d'équilibre de Nash.

Entrant Vs Historique II

Soit un jeu avec un entrant potentiel (E) et un firme historique (H) sur un marché avec un bien homogène. Au début du jeu, E doit décider s'il installe une capacité de production (IC) ou pas et H observe sa décision. Si E n'investit pas, alors le jeu est fini, son profit est nul sur ce marché et celui de H est égal à 100. H peut ensuite choisir d'augmenter sa capacité de production (AC) ou pas. Sans avoir observé sa décision, E peut décider de produire (P) ou pas. (Voir gains ci-après)

Forme extensive

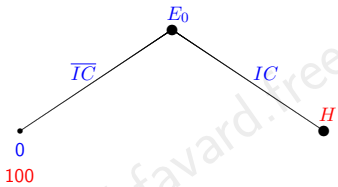


Figure 7 – Entrant Vs Historique II : Forme extensive

http://pascal.favard.free.fr/

Forme extensive

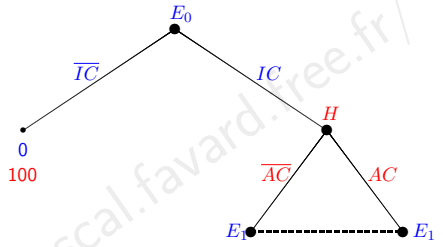


FIGURE 7 – Entrant Vs Historique II : Forme extensive

Forme extensive

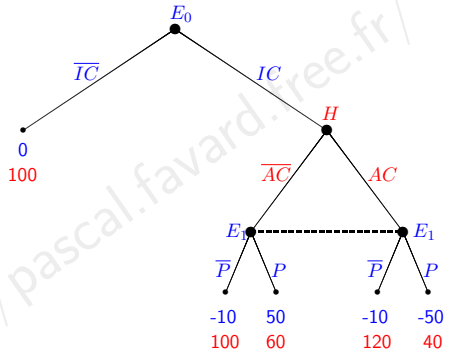


FIGURE 7 – Entrant Vs Historique II : Forme extensive

Forme normale

J		H	
E	s	$\overline{AC}$	AC
	(IC,P)	(50,60)	(-50,40)
	$(IC,\overline{P})$	(-10,100)	(-10,120)
	$(\overline{IC},P)$	(0,100)	(0,100)
	$(\overline{IC},\overline{P})$	(0,100)	(0,100)

TABLE 14 – Entrant Vs Historique II

3 EN en stratégies pures. Y a-t-il des stratégies strictement dominées ?

Forme normale

J		H	
E	s	$\overline{AC}$	AC
	(IC,P)	(50,60)	(-50,40)
	$(IC,\overline{P})$	(-10,100)	(-10,120)
	$(\overline{IC},P)$	(0,100)	(0,100)
	$(\overline{IC},\overline{P})$	(0,100)	(0,100)

TABLE 14 – Entrant Vs Historique II

Forme normale

J		H	
E	s	$\overline{AC}$	AC
	(IC,P)	(50,60)	(-50,40)
	$(\overline{IC},P)$	(0,100)	(0,100)
	$(\overline{IC},\overline{P})$	(0,100)	(0,100)

TABLE 14 – Entrant Vs Historique II

Faiblesses de l'équilibre de Nash ? ?

- Reconsidérons le jeu de l'entrée, on a vu qu'il y avait trois équilibres de Nash en stratégies pures :

$$EN_{\mathcal{SP}} = \{((IC,P),\overline{AC});((\overline{IC},P),AC);((\overline{IC},\overline{P}),AC)\}.$$

- Les deux derniers équilibres sont basés sur la menace que l'entrée sera combattue, si elle a lieu.
- Dans ce cas peut-on dire que la menace est non-crédible ?

3. Jeux dynamiques
3.1 Définitions
3.2 Équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux
3.3 Détermination des EPSJ : Rétroduction
3.4 Paradoxes de la rétroduction

Faiblesses de l'équilibre de Nash

- L'équilibre de Nash ne distingue pas les plans d'actions et le jeu effectif.
- En effet, cet équilibre est établi au niveau des plans d'actions définis sur le déroulement total du jeu.
- Cela ne pose aucun problème dans les jeux simultanés puisque les stratégies sont confondues avec les actions.
- Dans un jeu séquentiel, pourquoi un joueur en cours de jeu s'en tiendrait à son plan d'action, s'il y gagne d'en changer !
- Rappelons que le jeu est non-coopératif et que les agents sont rationnels. Il faudrait donc trouver un concept qui exige l'optimalité à chaque étape du jeu.

http://pascal.favard.free.fr/

Sous-Jeux

Définition :

Un sous-jeu d'un jeu en forme extensive (SJ) est constitué par :

- un ensemble K de sommets, comprenant un sommet de SJ et les sommets consécutifs à celui-ci, si un sommet k de K appartient à un ensemble d'information h non réduit à un singleton alors tous les sommets de h appartiennent à K $(h \subset K)$,
- l'ensemble des branches reliant les différents sommets de K,
- les gains de SJ correspondants aux sommets terminaux de K.

Trouvez le(s) sous-jeu(x)

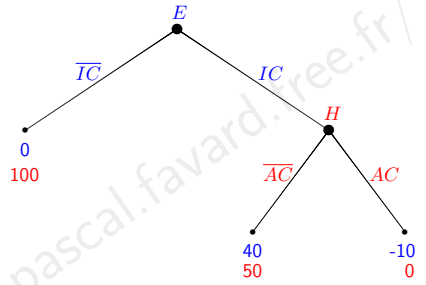


Figure 8 – Entrant Vs Historique I : Forme extensive

Trouvez le(s) sous-jeu(x)

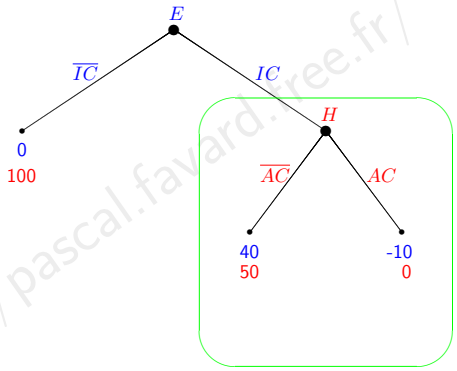


Figure 8 – Entrant Vs Historique I : Forme extensive

Trouvez le(s) sous-jeu(x)

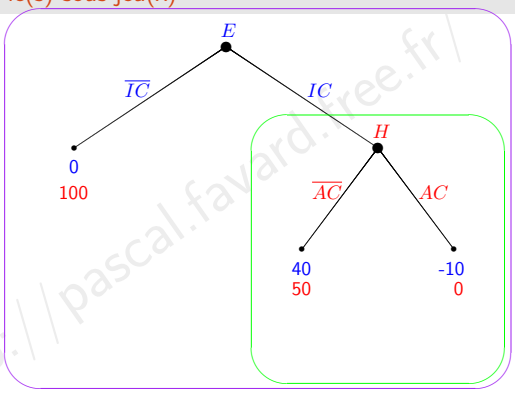


Figure 8 – Entrant Vs Historique I : Forme extensive

Trouvez le(s) sous-jeu(x)

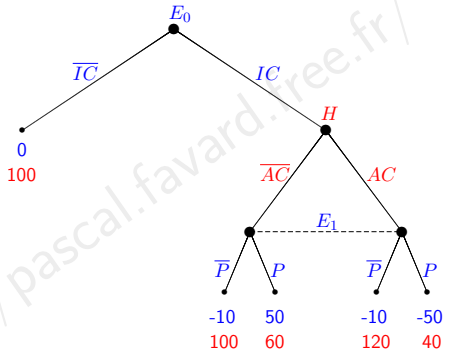


Figure 9 – Entrant Vs Historique II : Forme extensive

Trouvez le(s) sous-jeu(x)

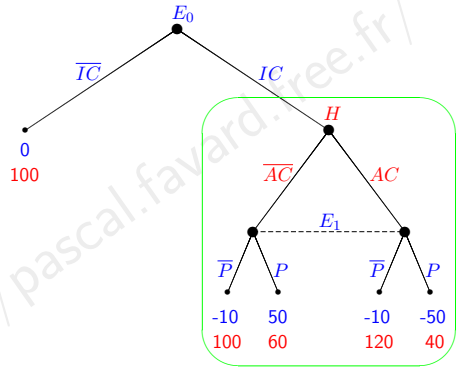


Figure 9 – Entrant Vs Historique II : Forme extensive

Trouvez le(s) sous-jeu(x)

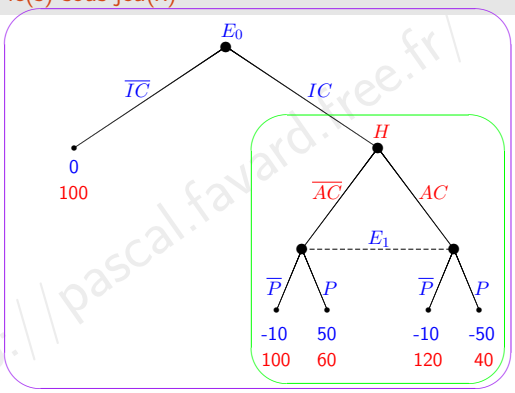


Figure 9 – Entrant Vs Historique II : Forme extensive

Équilibre parfait en sous-jeux (Selten (1975))

Reinhard Selten (1930-) économiste allemand, Prix Nobel 1994 avec John Harsanyi et John Nash.

Définition :

Un profil de stratégies est un équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux $(EPSJ)$ s'il correspond à un équilibre de Nash dans chacun des sous-jeux du jeu considéré.

http://pascal.favard.free.fr/

Équilibre parfait en sous-jeux (Selten (1975))

Reinhard Selten (1930-) économiste allemand, Prix Nobel 1994 avec John Harsanyi et John Nash.

Définition :

Un profil de stratégies est un équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux ($EPSJ$) s'il correspond à un équilibre de Nash dans chacun des sous-jeux du jeu considéré.

$\Rightarrow$ un EPSJ doit être un équilibre de Nash du jeu original qui est un sous-jeu de lui même par définition.

3. Jeux dynamiques
3.1 Définitions
3.2 Équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux
3.3 Détermination des EPSJ : Rétroduction
3.4 Paradoxes de la rétroduction

Le principe de rétroduction

Rétroduction $\Leftrightarrow$ Induction arrière $\Leftrightarrow$ Backward Induction

1. On commence par chercher les EN des sous-jeux les plus proches des nœuds terminaux
2. On remplace ces sous-jeux par les résultats d'équilibre
3. On recommence jusqu'au nœud initial

Exemple de jeu

Voici les étapes, le « timing » du jeu

1. Le joueur 1 choisit une action a_1, $a_1 \in A_1$
2. Le joueur 2 observe a_1 et choisit une action a_2, $a_2 \in A_2$
3. Les gains sont $u_1(a_1, a_2)$ et $u_2(a_1, a_2)$

Résoudre ce jeu par rétroduction

On commence par la fin, dans ce cas par la décision du joueur 2 considérant a_1 comme donnée :

- Le programme du joueur 2 à la seconde étape est :

$$\mathscr{P}_2 \left| \begin{array}{l} \underset{\{a_2 \in A_2\}}{\text{Max}} \; u_2(a_1, a_2) \\ \Rightarrow MR_2(a_1) \end{array} \right. \quad (2)$$

- Le programme du joueur 1 à la première étape est donc :

$$\mathscr{P}_1 \left| \begin{array}{l} \underset{\{a_1 \in A_1\}}{\text{Max}} \; u_1(a_1, MR_2(a_1)) \\ \Rightarrow a_1^* \end{array} \right. \quad (3)$$

$\Rightarrow$ La solution du jeu si elle existe est : $(a_1^*, MR_2(a_1^*))$

Jeu à trois étapes

Voici les étapes, le « timing » du jeu

1. Le joueur 1 choisit G ou D. Si il choisit G le jeu est fini. Le joueur 1 gagne 2 et le joueur 2 gagne 0
2. Le joueur 2 observe le choix du joueur 1. Si le joueur 1 a choisit D alors il choisit G' ou D'. En choisissant G' il finit le jeu et chacun gagne 1
3. Le joueur 1 observe le choix du joueur 2, n'oublions pas qu'il se rappelle ce qui s'est passé à l'étape 1. Si D et D' alors le joueur 1 joue G'' ou D''. Dans les deux cas le jeu est fini. S'il joue G'' il gagne 3 et le joueur 2 gagne 0. S'il joue D'' il gagne 0 et le joueur 2 gagne 2

Arbre de jeu à 2 joueurs et 3 étapes

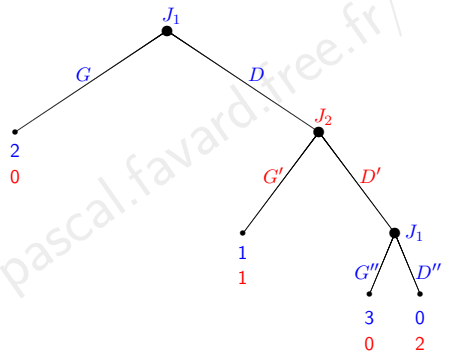


Figure 10 – Jeu sous forme extensive

Arbre de jeu à 2 joueurs et 3 étapes

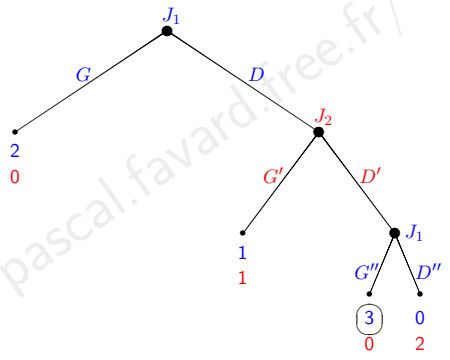


Figure 10 – Jeu sous forme extensive

http://pascal.favard.free.fr/

Arbre de jeu à 2 joueurs et 3 étapes

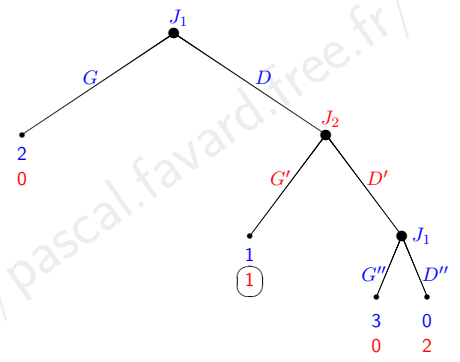


FIGURE 10 – Jeu sous forme extensive

Arbre de jeu à 2 joueurs et 3 étapes

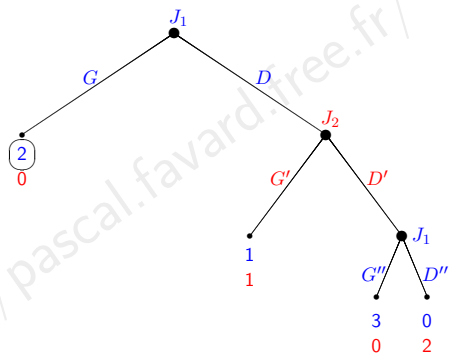


FIGURE 10 – Jeu sous forme extensive

Arbre de jeu à 2 joueurs et 3 étapes

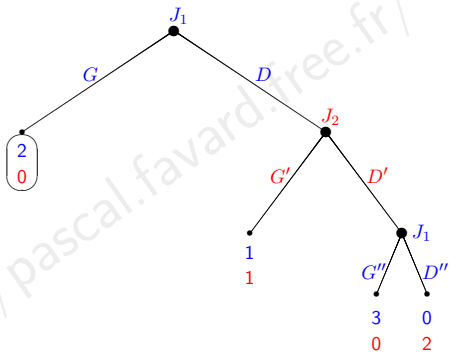


FIGURE 10 – Jeu sous forme extensive

Équilibre(s) de Nash du sous-jeu

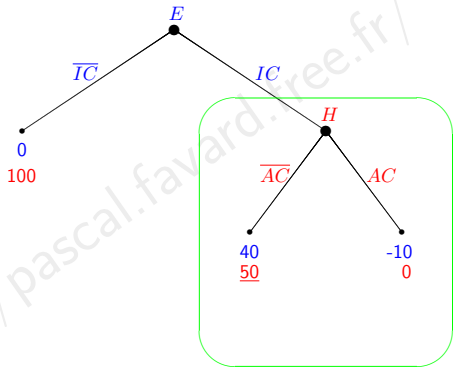


FIGURE 11 – Entrant Vs Historique I

EPSJ

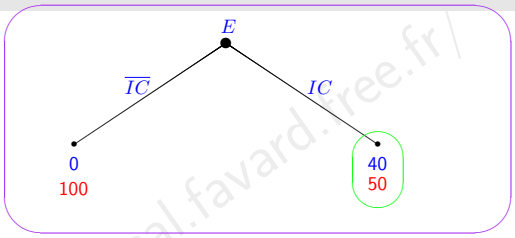
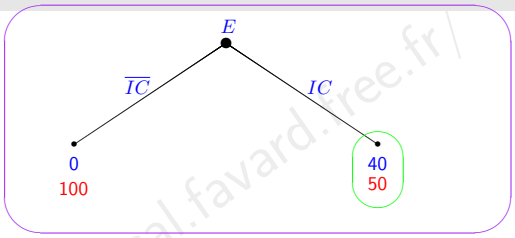


FIGURE 12 – Entrant Vs Historique I

EPSJ



$EPSJ = \{IC, \overline{AC}\}$

$\Rightarrow EN = (\overline{IC}, AC)$ est éliminé : menace non-crédible

FIGURE 12 – Entrant Vs Historique I

Équilibre(s) de Nash du sous-jeu

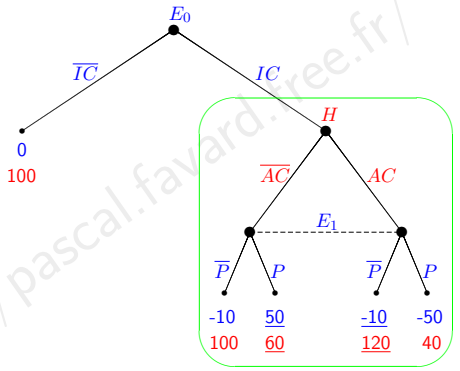
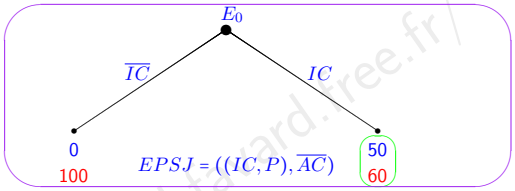
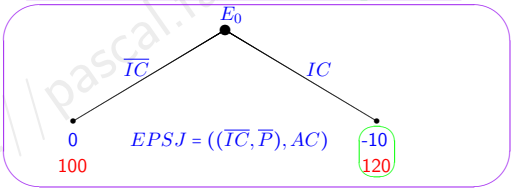


FIGURE 13 – Entrant Vs Historique II

EPSJ : 2 cas



$EPSJ = ((IC, P), \overline{AC})$



$EPSJ = ((\overline{IC}, \overline{P}), AC)$

FIGURE 14 – Entrant Vs Historique II

http://pascal.favard.free.fr/

Menace crédible

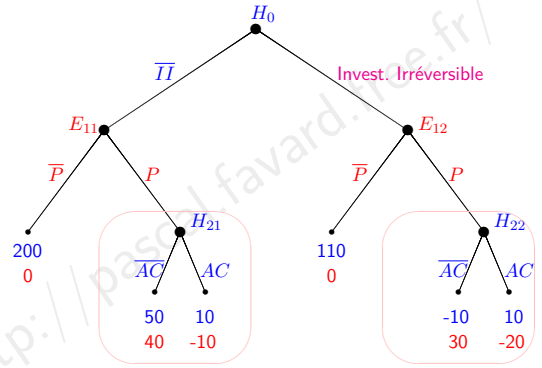


FIGURE 15 – Entrant Vs Historique III

Menace crédible

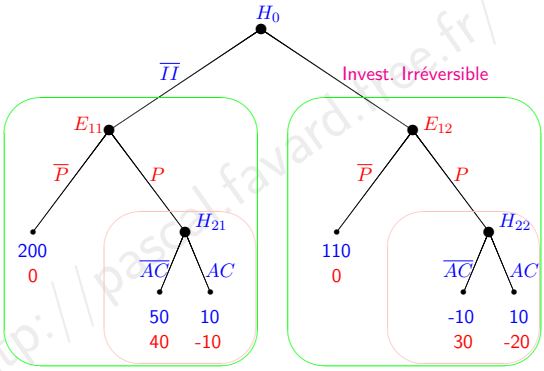


FIGURE 15 – Entrant Vs Historique III

Menace crédible

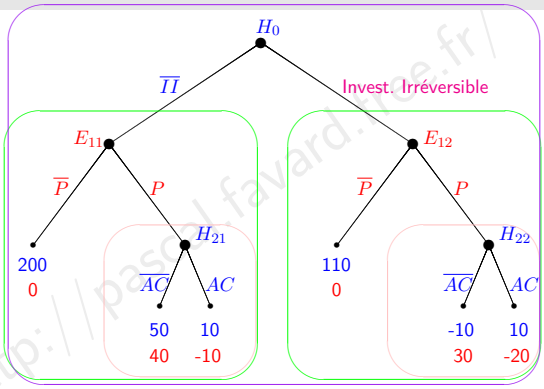


FIGURE 15 – Entrant Vs Historique III

Menace crédible

Un seul $EPSJ = ((II, \overline{AC}/H_{21}, AC/H_{22}), (P/E_{11}, \overline{P}/E_{12}))$

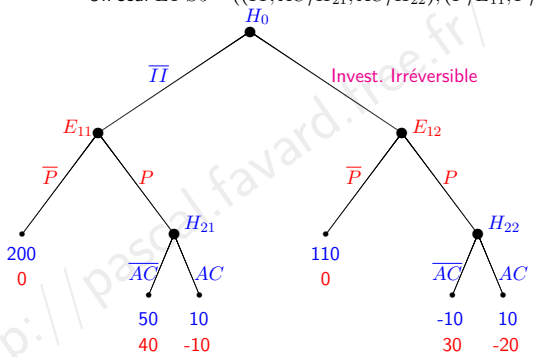


FIGURE 15 – Entrant Vs Historique III

Empêcher l'entrée

Pour protéger son marché une firme en place doit investir et cet investissement doit :

1. être irréversible,
2. être parfaitement observable par l'entrant potentiel,
3. modifier les gains du jeu pour crédibiliser la menace de combattre l'entrant potentiel.

3. Jeux dynamiques
3.1 Définitions
3.2 Équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux
3.3 Détermination des EPSJ : Rétroduction
3.4 Paradoxes de la rétroduction

Paradoxe de la rationalité

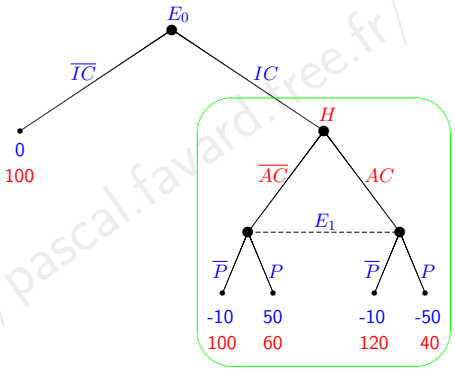


FIGURE 16 – Entrant Vs Historique II : Information Parfaite

Paradoxe de la rationalité

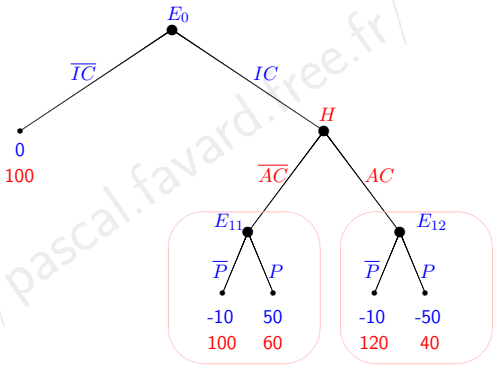


FIGURE 16 – Entrant Vs Historique II : Information Parfaite

http://pascal.favard.free.fr/

Paradoxe de la rationalité

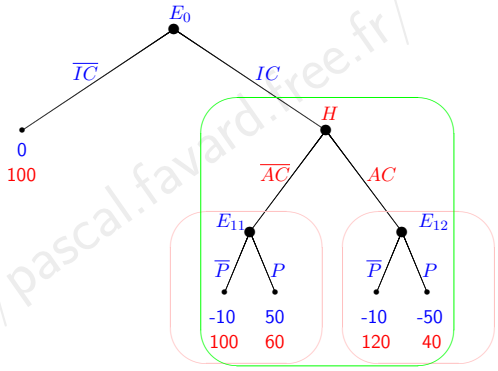


FIGURE 16 – Entrant Vs Historique II : Information Parfaite

Paradoxe de la rationalité

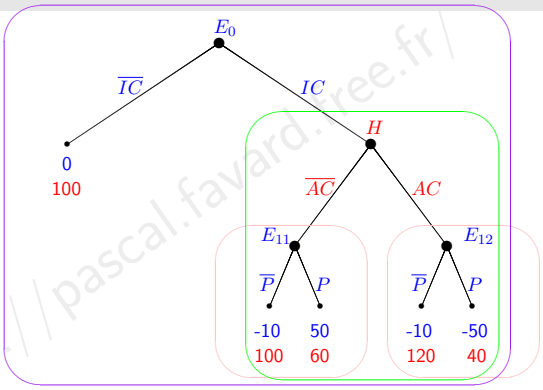
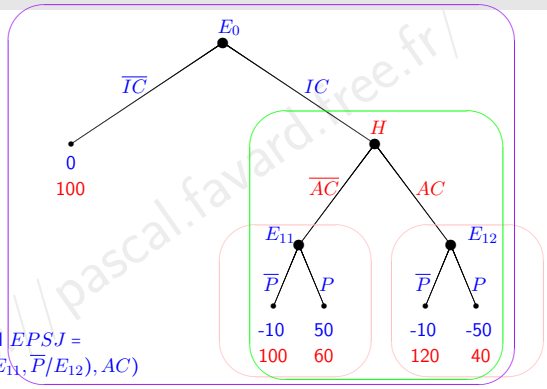


FIGURE 16 – Entrant Vs Historique II : Information Parfaite

Paradoxe de la rationalité



Un seul $EPSJ$ = $((\overline{IC}, P/E_{11}, \overline{P}/E_{12}), AC)$

FIGURE 16 – Entrant Vs Historique II : Information Parfaite

Paradoxe de la rationalité

- L'entreprise Historique joue $AC \Rightarrow \overline{P}$ puisque l'Entrant est rationnel.
- Mais l'Entrant étant rationnel il n'a jamais intérêt à jouer IC !
- Si on arrive au nœud H c'est qu'il y a eu des choix erronés, pourquoi ensuite considérer l'Entrant comme rationnel ?

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

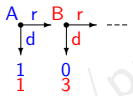


FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

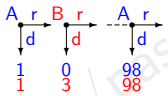


FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

http://pascal.favard.free.fr/

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

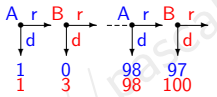


FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

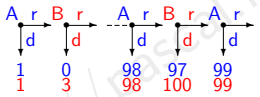


FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

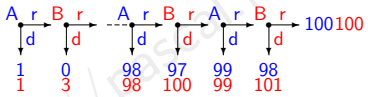


FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

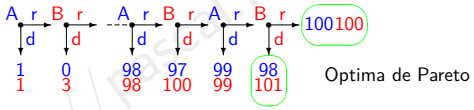


FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

Sous-optimalité des EPSJ

- Un $EPSJ$ est basé sur des choix optimaux à chaque étape du jeu : est-ce que cela implique qu'il est optimal au sens de Pareto ?
- Considérons le jeu du mille-pattes de Rosenthal (1980).

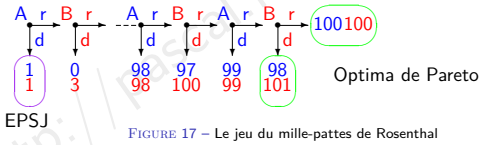


FIGURE 17 – Le jeu du mille-pattes de Rosenthal

Table des matières (Diapo : 1)

1. Introduction

2. Jeux statiques
2.1 Stratégies pures
- Jeux sous forme normale
- Élimination itérative des stratégies strictement dominées
- Équilibre de Nash
- Appendices

2.2 Stratégies mixtes et existence de l'équilibre
- Stratégies mixtes
- Équilibre de Nash : Existence

3. Jeux dynamiques
3.1 Définitions
3.2 Équilibre (de Nash) parfait en sous-jeux
3.3 Détermination des EPSJ : Rétroduction
3.4 Paradoxes de la rétroduction

http://pascal.favard.free.fr/